第11卷 第3期
1991年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.3
Aug. 1991

N重加权m次移位算子的拟相似*

严 子 锟
(福建师范大学，福州)

摘 要

本文证明了拟相似的N重单射双边加权m次移位有相同的本质谱，拟相似的N重单射单边加权m次移位是相似的。此外还给出了单射双边加权二次移位拟相似的一个充要条件。

设H是复的可分Hilbert空间，$B(H)$表示H上有界线性算子全体，$\mathbf{Z}$是整数全体，$\mathbf{Z}^+$是非负整数全体。$I=\mathbf{Z}$或$\mathbf{Z}^+$，$\{e_n\}_{n\in I}$是H的正规正交基，$\{s_n\}_{n\in I}$是有界数列，m是一个自然数，若$T\in B(H)$，$Te_n=s_ne_{n+m}(n\in I)$，则称T为加权m次移位算子，如果$I=\mathbf{Z}$，则称T为双边加权m次移位；如果$I=\mathbf{Z}^+$，则称T为单边加权m次移位。我们把具有权$s=\{s_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$的双边加权$m$次移位，记为$W_s^{(m)}$，把具有权$s=\{s_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$的单边加权$m$次移位，记为$T_s^{(m)}$。

设$H_j(j=1,2,\cdots,N)$都是复的可分Hilbert空间，$W_{s(j)}^{(m)}$是H_j上双边加权m次移位，$T_{s(j)}^{(m)}$是H_j上单边加权m次移位，称算子$W=\sum_{j=1}^{N}\oplus W_{s(j)}^{(m)}$为$H=\sum_{j=1}^{N}\oplus H_j$上$N$重双边加权$m$次移位，称算子$T=\sum_{j=1}^{N}\oplus T_{s(j)}^{(m)}$为$H=\sum_{j=1}^{N}\oplus H_j$上$N$重单边加权$m$次移位。显然通常的双边（单边）加权移位就是一重双边（单边）加权一次移位。

对于有界数列$s=\{s_n\}_{n\in I}$，记$|s|=\{|s_n|\}_{n\in I}$，易推知$W_s^{(m)}$与$W_{|s|}^{(m)}$是酉等价的，$T_s^{(m)}$与$T_{|s|}^{(m)}$也是酉等价的。本文只研究N重单射加权m次移位，因此不失一般性，下面总是假设权$s=\{s_n\}_{n\in I}$是正实数列。

设H_1，H_2为复Hilbert空间，$B(H_i,H_j)(i,j=1,2)$表示H_i到H_j的有界线性算子全体，对于$A\in B(H_1)$，$B\in B(H_2)$，如果存在单射且有稠值域算子$X\in B(H_2,H_1)$，$Y\in B(H_1,H_2)$使得$Ax=XB$，$By=YA$，则称算子A，B拟相似。

设W_s是单射双边加权移位，$s=\{s_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$，记

$$i(W_s)^-=\lim_n\inf_{k<0}(s_{k-1}s_{k-2}\cdots s_{k-n})^{\frac{1}{n}},$$

$$i(W_s)^+=\lim_n\inf_{k>-1}(s_{k+1}s_{k+2}\cdots s_{k+n})^{\frac{1}{n}},$$

$$r(W_s)^-=\lim_n\sup_{k<0}(s_{k-1}s_{k-2}\cdots s_{k-n})^{\frac{1}{n}},$$

$$r(W_s)^+=\lim_n\sup_{k>-1}(s_{k+1}s_{k+2}\cdots s_{k+n})^{\frac{1}{n}},$$

$$i(W_s)=\min\{i(W_s)^-,\ i(W_s)^+\},$$

*1989年9月24日收到。福建省自然科学基金资助项目。

$$r(W_s)=\max\{r(W_s)^-,\ r(W_s)^+\}.$$

引理1 （见〔1〕定理2）设W_s是单射双边加权移位算子，则

（1）当$r(W_s)^- < i(W_s)^+$时

$$\sigma_e(W_s)=\{\lambda\in\mathbf{C}: i(W_s)^-\leqslant|\lambda|\leqslant r(W_s)^- \text{或} i(W_s)^+\leqslant|r|\leqslant r(W_s)^+\}.$$

（2）当$r(W_s)^+ < i(W_s)^-$时

$$\sigma_e(W_s)=\{\lambda\in\mathbf{C}: i(W_s)^+\leqslant|\lambda|\leqslant r(W_s)^+ \text{或} i(W_s)^-\leqslant|\lambda|\leqslant r(W_s)^-\}.$$

（3）当$r(W_s)^-\geqslant i(W_s)^+$且$r(W_s)^+\geqslant i(W_s)^-$时

$$\sigma_e(W_s)=\{\lambda\in\mathbf{C}: i(W_s)\leqslant|\lambda|\leqslant r(W_s)\}.$$

引理2 （见〔2〕定理4.2）设W_∂, W_β都是单射双边加权移位算子，则W_∂, W_β拟相似的充要条件是存在整数k，m使得

$$\sup_{i\geqslant\max(1,1-k)}(\partial_0\cdots\partial_{i-1+k})/(\beta_0\cdots\beta_{i-1})<\infty,\quad \sup_{i\geqslant\max(1,1-k)}(\beta_{-1}\cdots\beta_{-(i+k)})/(\partial_{-1}\cdots\partial_{-i})<\infty,$$

$$\sup_{i\geqslant\max(1,1-m)}(\beta_0\cdots\beta_{i-1+m})/(\partial_0\cdots\partial_{i-1})<\infty,\quad \sup_{i\geqslant\max(1,1-m)}(\partial_{-1}\cdots\partial_{-(i+m)})/(\beta_{-1}\cdots\beta_{-i})<\infty.$$

定理3 设W_∂, W_β都是单射双边加权移位算子，如果W_∂, W_β拟相似，则$\sigma_e(W_\partial)=\sigma_e(W_\beta)$.

证明 根据引理1，只要证明$i(W_a)^+=i(W_\beta)^+$，$i(W_a)^-=i(W_\beta)^-$，$r(W_a)^+=r(W_\beta)^+$，$r(W_a)^-=r(W_\beta)^-$. 由于$\{\partial_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$，$\{\beta_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$是有界的，因此不失一般性可以假设$\partial_i\leqslant 1, \beta_i\leqslant 1$ $(i\in\mathbf{Z})$. 因为W_∂，W_β拟相似，根据引理2知，存在$M>0$及整数k，m使得

$$(\partial_0\partial_1\cdots\partial_{i-1+k})\leqslant M(\beta_0\beta_1\cdots\beta_{i-1})\ (i\geqslant\max(1,1-k)) \tag{1}$$

$$(\beta_0\beta_1\cdots\beta_{j-1+m})\leqslant M(\partial_0\partial_1\cdots\partial_{j-1})\ (j\geqslant\max(1,1-m)) \tag{2}$$

由于$\partial_i\leqslant 1, \beta_i\leqslant 1$ $(i\in\mathbf{Z})$，故可设$K=m\geqslant 1$，于是由式（1），（2）得

$(\partial_j\partial_{j+1}\cdots\partial_{i-1+m})\leqslant M^2(\beta_{j+m}\beta_{j+m+1}\cdots\beta_{i-1})$ $(i>j+m,\ j\geqslant 1)$，故 $(\partial_j\partial_{j+1}\cdots\partial_{j+(n-1)})\leqslant$ $\leqslant M^2(\beta_{j+m}\beta_{j+m+1}\cdots\beta_{j+(n-m-1)})(n>2m,\ j\geqslant 1)$，于是

$$(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})\leqslant M^2(\beta_{j+1+m}\beta_{j+m+2}\cdots\beta_{j+(n-m)})\ (n>2m,\ j\geqslant 0) \tag{3}$$

从而$\inf\limits_{j\geqslant -1}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})\leqslant M^2(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+(n-2m)})$ $(l\geqslant m,\ n>2m)$，故

$$\inf_{j\geqslant -1}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})\leqslant M^2\inf_{l\geqslant m}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+(n-2m)})\ (n>2m)$$

所以

$$\begin{aligned}\inf_{j\geqslant -1}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})^{\frac{1}{n}}&=[\inf_{j\geqslant -1}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})]^{\frac{1}{n}}\\&\leqslant M^{\frac{2}{n}}[\inf_{l\geqslant m}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+(n-2m)})]^{\frac{1}{n}}\\&=M^{\frac{2}{n}}[\inf_{l\geqslant m}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+(n-2m)})^{\frac{1}{n-2m}}]^{\frac{n-2m}{n}}\quad(n>2m),\end{aligned}$$

因此

$$\lim_n\inf_{j\geqslant -1}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})^{\frac{1}{n}}\leqslant\lim_n\inf_{l\geqslant m}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+n})^{\frac{1}{n}} \tag{4}$$

下面证明$\lim\limits_n\inf\limits_{l\geqslant -1}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+n})^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_n\inf\limits_{l\geqslant m}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+n})^{\frac{1}{n}}$.

设$d=\min\{\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_m\}$，则$d>0$，存在$a>1$使得$ad>1\geqslant\beta_i$ $(i\in\mathbf{Z})$，取$d_l=ad$ $(l=0,1,\cdots,m)$，于是

$$(d_{l+1}d_{l+2}\cdots d_m\beta_{m+1}\beta_{m+2}\cdots\beta_{l+n})^{\frac{1}{n}}\geqslant(\beta_{m+1}\beta_{m+2}\cdots\beta_{m+n})^{\frac{1}{n}}\ (-1\leqslant l<m)$$

令$\beta_l^1=\begin{cases}d_l, & l=0,1,\cdots m\\ \beta_l, & l\geqslant m+1\end{cases}$，则有

$$\lim_n \inf_{l\geqslant -1}(\beta_{l+1}^1\beta_{l+2}^1\cdots\beta_{l+n}^1)^{\frac{1}{n}}\geqslant \lim_n \inf_{l\geqslant m}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+n})^{\frac{1}{n}}$$

$$\geqslant \lim_n \inf_{l\geqslant -1}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+n})^{\frac{1}{n}},$$

又$\beta_{l+1}^1\beta_{l+2}^1\cdots\beta_{l+n}^1\leqslant a^{m+1}\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+n}$（$l\geqslant -1$），故

$$\lim_n \inf_{l\geqslant -1}(\beta_{l+1}^1\beta_{l+2}^1\cdots\beta_{l+n}^1)^{\frac{1}{n}}\leqslant \lim_n a^{\frac{m+1}{n}}\inf_{l\geqslant -1}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+n})^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_n \inf_{l\geqslant -1}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+n})^{\frac{1}{n}},$$

因此$\lim_n \inf_{l\geqslant -1}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+n})^{\frac{1}{n}}=\lim_n \inf_{l\geqslant m}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+n})^{\frac{1}{n}}$，从而由式（4）得$\lim_n \inf_{j\geqslant -1}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})^{\frac{1}{n}}\leqslant \lim_n \inf_{l\geqslant -1}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+n})^{\frac{1}{n}}$，即$i(W_\partial)^+\leqslant i(W_\beta)^+$，同理可证$i(W_\beta)^+\leqslant i(W_\partial)^+$，所以得到$i(W_\partial)^+=i(W_\beta)^+$．下面证明$r(W_\partial)^+=r(W_\beta)^+$．

由式（3）得$(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})\leqslant M^2\sup_{l\geqslant -1}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+(n-2m)})(j\geqslant 0)$于是$\sup_{j\geqslant 0}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})\leqslant M^2\sup_{l\geqslant -1}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+(n-2m)})(n>2m)$，从而

$$\lim_n \sup_{j\geqslant 0}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})^{\frac{1}{n}}\leqslant \lim_n M^{\frac{2}{n}}\left[\sup_{l\geqslant -1}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+(n-2m)})^{\frac{1}{n-2m}}\right]^{\frac{n-2m}{n}}$$

$$=\lim_n \sup_{l\geqslant -1}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+n})^{\frac{1}{n}}\qquad(5)$$

现在证明$\lim_n \sup_{j\geqslant 0}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})^{\frac{1}{n}}=\lim_n \sup_{j\geqslant -1}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})^{\frac{1}{n}}$．由于$0<\partial_i\leqslant 1\ (i\in \mathbf{Z})$，故$(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})\leqslant\partial_1\partial_2\cdots\partial_{n-1}$（$j=-1,0;n>1$），所以$(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})\leqslant\sup_{j\geqslant 0}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+(n-1)})(j\geqslant -1)$，故$\sup_{j\geqslant -1}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})\leqslant\sup_{j\geqslant 0}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+(n-1)})$，于是

$$\lim_n \sup_{j\geqslant -1}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})^{\frac{1}{n}}\leqslant \lim_n\left[\sup_{j\geqslant 0}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+(n-1)})^{\frac{1}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}}$$

$$=\lim_n \sup_{j\geqslant 0}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})^{\frac{1}{n}},$$

又显然$\lim_n \sup_{j\geqslant -1}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})^{\frac{1}{n}}\geqslant \lim_n \sup_{j\geqslant 0}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})^{\frac{1}{n}}$，因此$\lim_n \sup_{j\geqslant -1}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})^{\frac{1}{n}}=\lim_n \sup_{j\geqslant 0}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})^{\frac{1}{n}}$，于是由式（5）得$\lim_n \sup_{j\geqslant -1}(\partial_{j+1}\partial_{j+2}\cdots\partial_{j+n})^{\frac{1}{n}}\leqslant \lim_n \sup_{l\geqslant -1}(\beta_{l+1}\beta_{l+2}\cdots\beta_{l+n})^{\frac{1}{n}}$，即$r(W_\partial)^+\leqslant r(W_\beta)^+$，同理可证$r(W_\beta)^+\leqslant r(W_\partial)^+$，因此$r(W_\partial)^+=r(W_\beta)^+$．类似以上证法同样可证$i(W_\partial)^-=i(W_\beta)^-$，$r(W_\partial)^-=r(W_\beta)^-$，所以根据引理1得$\sigma_e(W_\partial)=\sigma_e(W_\beta)$．

引理4 设A_1，A_2分别是复可分Hilbert空间H_1，H_2上的具有同样权$\{s_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$的双边加权移位算子，则A_1，A_2酉等价．

引理5 设A_1，A_2分别是复可分Hilbert空间H_1，H_2上的具有同样权$\{s_i\}_{i\in\mathbf{Z}^+}$的单边加权移位算子，则$A_1$，$A_2$酉等价．

定理6 设$T=\sum_{j=1}^{N}\oplus W_{\partial(j)}^{(m)}$，$S=\sum_{j=1}^{N}\oplus W_{\beta(j)}^{(m)}$ 都是$H=\sum_{j=1}^{N}\oplus H_j$上$N$重单射双边加权$m$次移位，如果$T$，$S$拟相似，则$\sigma_e(T)=\sigma_e(s)$。

证明 设$\{e_n^{(j)}\}_{n\in Z}$是H_j（$j=1,2,\cdots N$）的正规正交基，$W_{\partial}{}^{(m)}_{(j)}$是$H_j$上具有权$\partial^{(j)}=\{\partial_n^{(j)}\}_{n\in Z}$的单射双边加权$m$次移位，记$H_{ji}$为$\{e_{mn+i-1}^{(j)}\}_{n\in Z}$张成的$H_j$的闭线性子空间，$W_{\partial(j)(i)}$是$H_{ji}$上具有权$\partial^{(j)}(i)=\{\partial_{mn+i-1}^{(j)}\}_{n\in Z}$的单射双边加权移位，则$W_{\partial(j)}^{(m)}$酉等价于$m$重单射双边加权移位$\sum_{i=1}^{m}\oplus W_{\partial(j)(i)}$，于是$T=\sum_{j=1}^{N}\oplus W_{\partial(j)}^{(m)}$酉等价于$Nm$重单射双边加权移位$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\oplus W_{\partial(j)(i)}$。同理$S=\sum_{j=1}^{N}\oplus W_{\beta(j)}^{(m)}$酉等价于$Nm$重单射双边加权移位$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\oplus W_{\beta(j)(i)}$。因此$\sigma_e(T)=\bigcup_{j=1}^{N}\bigcup_{i=1}^{m}(W_{\partial(j)(i)})$，$\sigma_e(s)=\bigcup_{j=1}^{N}\bigcup_{i=1}^{m}\sigma_e(W_{\beta(j)(i)})$，于是根据定理3，引理4和〔3〕定理4得$\sigma_e(T)=\sigma_e(s)$。

定理7 设$A=\sum_{j=1}^{N}\oplus T_{\partial(j)}^{(m)}$，$B=\sum_{j=1}^{N}\oplus T_{\beta(j)}^{(m)}$ 都是$H=\sum_{j=1}^{N}\oplus H_j$上$N$重单射单边加权$m$次移位，如果$A$，$B$拟相似，则$A$，$B$相似。

证明 设$\{e_n^{(j)}\}_{n\in Z^+}$是H_j（$j=1,2,\cdots N$）的正规正交基，$T_{\partial(j)}^{(m)}$是H_j上具有权$\partial^{(j)}=\{\partial_n^{(j)}\}_{n\in Z^+}$的单射单边加权$m$次移位。记$H_{ji}$为$\{e_{mn+i-1}^{(j)}\}_{n\in Z^+}$（$i=1,2,\cdots m$）张成的$H_j$的闭线性子空间，$T_{\partial(j)(i)}$是$H_{ji}$上具有权$\partial^{(j)}(i)=\{\partial_{mn+i-1}^{(j)}\}_{n\in Z^+}$的单射单边加权移位，即$T_{\partial(j)(i)}e_{mn+i-1}^{(j)}=\partial_{mn+i-1}^{(j)}e_{m(n+1)+i-1}^{(j)}$（$n\in Z^+$），则$T_{\partial(j)}^{(m)}$酉等价于$m$重单射单边加权移位$\sum_{i=1}^{m}\oplus T_{\partial(j)(i)}$，于是$A=\sum_{j=1}^{N}\oplus T_{\partial(j)}^{(m)}$酉等价于$Nm$重单射单边加权移位$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\oplus T_{\partial(j)(i)}$。同理$B=\sum_{j=1}^{N}\oplus T_{\beta(j)}^{(m)}$酉等价于$Nm$重单射单边加权移位$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\oplus T_{\beta(j)(i)}$，于是根据引理5和〔3〕定理7知$A$，$B$相似。

定理8 单射双边加权二次移位$W_{\beta}{}^{(2)}$，$W_{\beta}{}^{(2)}$拟相似的充要条件是存在整数k,l使得

$$\sup_{i>\max(2,2-k)}(\partial_{i+k-2}\partial_{i+k-4}\cdots\partial_{\chi(i+k)})/(\beta_{i-2}\beta_{i-4}\cdots\beta_{\chi(i)})<\infty \quad (1)$$

$$\sup_{i>\max(2,2-k)}(\beta_{-(i+k)}\beta_{-(i+k)+2}\cdots\beta_{g(-i-k)})/(\partial_{-i}\partial_{-i+2}\cdots\partial_{g(-i)})<\infty \quad (2)$$

$$\sup_{i>\max(2,2-l)}(\beta_{i+l-2}\beta_{i+l-4}\cdots\beta_{\chi(i+l)})/(\partial_{i-2}\partial_{i-4}\cdots\partial_{\chi(i)})<\infty \quad (3)$$

$$\sup_{i>\max(2,2-l)}(\partial_{-(i+l)}\partial_{-(i+l)+2}\cdots\partial_{g(-i-l)})/(\beta_{-i}\beta_{-i+2}\cdots\beta_{g(-i)})<\infty \quad (4)$$

其中$\chi(n)=\begin{cases}0, & n=2m\\ 1, & n=2m+1\end{cases}$（$m=0,1,2,\cdots$），$g(-n)=\begin{cases}-1, & n=2m+1\\ -2, & n=2m\end{cases}$（$m=1,2,\cdots$）。

证明 $\partial=\{\partial_n\}_{n\in Z}$，$\beta=\{\beta_n\}_{n\in Z}$。$\{e_n\}_{n\in Z}$是$H$的正规正交基，记$H_j$为$\{e_{2n+j-1}\}_{n\in Z}$（$j=1,2$）张成的$H$的闭线性子空间，$\partial_n^{(j)}=\partial_{2n+j-1}$，$\beta_n^{(j)}=\beta_{2n+j-1}$，$e_n^{(j)}=e_{2n+j-1}$（$n\in Z$，$j=1,2$），$\partial^{(j)}=\{\partial_n^{(j)}\}_{n\in Z}$，$\beta^{(j)}=\{\beta_n^{(j)}\}$ $n\in Z$，定义算子$W_{\partial(j)}$，$W_{\beta(j)}$使得$W_{\partial(j)}e_n^{(j)}=$

$=\partial_n^{(j)}e_{n+1}^{(j)}$，$W_{\beta(j)}e_n^{(j)}=\beta_n^{(j)}e_{n+1}^{(j)}(n\in\mathbb{Z},\ j=1,2)$，则$W_{\partial(j)},W_{\beta(j)}$都是$H_j(j=1,2)$上单射双边加权移位，$W_\partial^{(2)}$酉等价于$W_{\partial(1)}\oplus W_{\partial(2)}$，$W_\beta^{(2)}$酉等价于$W_{\beta(1)}\oplus W_{\beta(2)}$．

（1）先证充分性：

（a）若k，l都是偶数．用$2i$代替式（1），（2），（3），（4）中的i得

$$\sup_{i>\max(1,1-\frac{k}{2})}(\partial_{2(i-1+\frac{k}{2})}\partial_{2(i-2+\frac{k}{2})}\cdots\partial_0)/(\beta_{2(i-1)}\beta_{2(i-2)}\cdots\beta_0)<\infty,$$

$$\sup_{i>\max(1,1-\frac{k}{2})}(\beta_{-2(i+\frac{k}{2})}\beta_{-2(i-1+\frac{k}{2})}\cdots\beta_{-2})/(\partial_{-2i}\partial_{-2(i-1)}\cdots\partial_{-2})<\infty,$$

$$\sup_{i>\max(1,1-\frac{l}{2})}(\beta_{2(i-1+\frac{l}{2})}\beta_{2(i-2+\frac{l}{2})}\cdots\beta_0)/(\partial_{2(i-1)}\partial_{2(i-2)}\cdots\partial_0)<\infty,$$

$$\sup_{i>\max(1,1-\frac{l}{2})}(\partial_{-2(i+\frac{l}{2})}\partial_{-2(i-1+\frac{l}{2})}\cdots\partial_{-2})/(\beta_{-2i}\beta_{-2(i-1)}\cdots\beta_{-2})<\infty.$$

也就是

$$\sup_{i>\max(1,1-\frac{k}{2})}(\partial_0^{(1)}\partial_1^{(1)}\cdots\partial_{i-1+\frac{k}{2}}^{(1)})/(\beta_0^{(1)}\beta_1^{(1)}\cdots\beta_{i-1}^{(1)})<\infty,$$

$$\sup_{i>\max(1,1-\frac{k}{2})}(\beta_{-1}^{(1)}\beta_{-2}^{(1)}\cdots\beta_{-(i+\frac{k}{2})}^{(1)})/(\partial_{-1}^{(1)}\partial_{-2}^{(1)}\cdots\partial_{-i}^{(1)})<\infty,$$

$$\sup_{i>\max(1,1-\frac{l}{2})}(\beta_0^{(1)}\beta_1^{(1)}\cdots\beta_{i-1+\frac{l}{2}}^{(1)})/(\partial_0^{(1)}\partial_1^{(1)}\cdots\partial_{i-1}^{(1)})<\infty,$$

$$\sup_{i>\max(1,1-\frac{l}{2})}(\partial_{-1}^{(1)}\partial_{-2}^{(1)}\cdots\partial_{-(i+\frac{l}{2})}^{(1)})/(\beta_{-1}^{(1)}\beta_{-2}^{(1)}\cdots\beta_{-i}^{(1)})<\infty.$$

于是根据引理2知$W_{\partial(1)}$，$W_{\beta(1)}$拟相似．用$2i+1$代替式（1），（2），（3），（4）中的i同理可推得$W_{\partial(2)},W_{\beta(2)}$拟相似．因此根据〔3〕定理2得$W_\partial^{(2)},W_\beta^{(2)}$拟相似．

（b）若k，l都是奇数．类似（a）的证法可推得$W_\partial^{(2)},W_\beta^{(2)}$拟相似．

（c）若k为偶数，l为奇数．用$2i$代替式（1），（2）中的i得

$$\sup_{i>\max(1,1-\frac{k}{2})}(\partial_0^{(1)}\partial_1^{(1)}\cdots\partial_{(i-1)+\frac{k}{2}}^{(1)})/(\beta_0^{(1)}\beta_1^{(1)}\cdots\beta_{i-1}^{(1)})<\infty$$

$$\sup_{i>\max(1,1-\frac{k}{2})}(\beta_{-1}^{(1)}\beta_{-2}^{(1)}\cdots\beta_{-(i+\frac{k}{2})}^{(1)})/(\partial_{-1}^{(1)}\partial_{-2}^{(1)}\cdots\partial_{-i}^{(1)})<\infty$$

于是根据〔2〕引理4.1知，存在单射且有稠值域算子X_1，使得$W_{\partial(1)}X_1=X_1W_{\beta(1)}$．同理用$2i+1$代替式（1），（2）中的$i$，可推得存在单射且有稠值域算子$X_2$使得$W_{\partial(2)}X_2=X_2W_{\beta(2)}$．

用$2i$代替式（3）中的i得

$$\sup_{i>\max(1,\frac{l-1}{2})}(\beta_{2(i-1+\frac{l-1}{2})+1}\beta_{2(i-2+\frac{l-1}{2})+1}\cdots\beta_1)/(\partial_{2(i-1)}\partial_{2(i-2)}\cdots\partial_0)<\infty$$用

用$2i-1$代替式（4）中的i得

$$\sup_{i>\max(1,\frac{l-1}{2})}(\partial_{-2(i+\frac{l-1}{2})}\partial_{-2(i-1+\frac{l-1}{2})}\cdots\partial_{-}\partial_{-2})/(\beta_{-2i+1}\beta_{-2i+3}\cdots\beta_{-1})<\infty$$

记$p=\dfrac{l-1}{2}$，即有

$$\sup_{i>\max(1,1-p)}(\beta_0^{(2)}\beta_1^{(2)}\cdots\beta_{i-1+p}^{(2)})/(\partial_0^{(1)}\partial_1^{(1)}\cdots\partial_{i-1}^{(1)})<\infty$$

$$\sup_{i>\max(1,1-p)}(\partial_{-1}^{(1)}\partial_{-2}^{(1)}\cdots\partial_{-(i+p)}^{(1)})/(\beta_{-1}^{(2)}\beta_{-2}^{(2)}\cdots\beta_{-i}^{(2)})<\infty$$

于是根据〔2〕引理4.1知，存在单射且有稠值域算子X_3使得$W_{\beta(2)}=X_3W_{\partial(1)}$．同理用$2i-1$代替（3）中的$i$，用$2i$代替式（4）中的$i$可推得存在单射且有稠值域算子$X_4$

使得$W_{\beta(1)}X_4=X_4W_{\partial(2)}$.

由以上证明知，存在单射且有稠值域算子X_1, X_2, X_3, X_4使得$W_{\partial(1)}X_1=X_1W_{\beta(1)}$, $W_{\partial(2)}X_2=X_2W_{\beta(2)}$, $W_{\beta(2)}X_3=X_3W_{\partial(1)}$, $W_{\beta(1)}X_4=X_4W_{\partial(2)}$，由这四个等式易推知$W_{\partial(1)}$，$W_{\beta(1)}$，$W_{\partial(2)}$，$W_{\beta(2)}$两两拟相似，因此根据〔3〕定理2得$W_\partial^{(2)}$, $W_\beta^{(2)}$拟相似.

（d）若k为奇数，l为偶数．类似（c）的证法同样可推得$W_\partial^{(2)}$, $W_\beta^{(2)}$拟相似.

（2）现证必要性：

由$W_\partial^{(2)}$, $W_\beta^{(2)}$拟相似，根据〔3〕定理2知必有$W_{\partial(1)}$, $W_{\beta(1)}$拟相似且$W_{\partial(2)}$, $W_{\beta(2)}$拟相似，或$W_{\partial(1)}$, $W_{\beta(2)}$拟相似且$W_{\partial(2)}$, $W_{\beta(1)}$拟相似.

（a）若$W_{\partial(1)}$, $W_{\beta(1)}$拟相似且$W_{\partial(2)}$, $W_{\beta(2)}$拟相似．根据引理2及$\{\partial_n^{(1)}\}_{n\in Z}$, $\{\beta_n^{(1)}\}_{n\in Z}$, $\{\partial_n^{(2)}\}_{n\in Z}$, $\{\beta_n^{(2)}\}_{n\in Z}$都是有界正实数列，推知存在整数$p$使得

$$\sup_{i>\max(1,1-p)}(\partial_0^{(1)}\partial_1^{(1)}\cdots\partial_{i-1+p}^{(1)})/(\beta_0^{(1)}\beta_1^{(1)}\cdots\beta_{i-1}^{(1)})<\infty,$$

$$\sup_{i>\max(1,1-p)}(\beta_{-1}^{(1)}\beta_{-2}^{(1)}\cdots\beta_{-(i+p)}^{(1)})/(\partial_{-1}^{(1)}\partial_{-2}^{(1)}\cdots\partial_{-i}^{(1)})<\infty,$$

$$\sup_{i>\max(1,1-p)}(\partial_0^{(2)}\partial_1^{(2)}\cdots\partial_{i-1+p}^{(2)})/(\beta_0^{(2)}\beta_1^{(2)}\cdots\beta_{i-1}^{(2)})<\infty,$$

$$\sup_{i>\max(1,1-p)}(\beta_{-1}^{(2)}\beta_{-2}^{(2)}\cdots\beta_{-(i+p)}^{(2)})/(\partial_{-1}^{(2)}\partial_{-2}^{(2)}\cdots\partial_{-i}^{(2)})<\infty.$$

也就是

$$\sup_{i>\max(1,1-p)}(\partial_0\partial_2\cdots\partial_{2i+2p-2})/(\beta_0\beta_2\cdots\beta_{2i-2})<\infty \quad (5)$$

$$\sup_{i>\max(1,1-p)}(_{-2}\beta_{-4}\cdots\beta_{-(2i+2p)})/(\partial_{-2}\partial_{-4}\cdots\partial_{-2i})<\infty \quad (6)$$

$$\sup_{i>\max(1,1-p)}(\partial_1\partial_3\cdots\partial_{(2i+1)+2p-2})/(\beta_1\beta_3\cdots\beta_{(2i+1)-2})<\infty \quad (7)$$

$$\sup_{i>\max(1,1-p)}(\beta_{-1}\beta_{-3}\cdots\beta_{-(2i-1+2p)})/(\partial_{-1}\partial_{-3}\cdots\partial_{-(2i-1)})<\infty \quad (8)$$

令$k=2p$，由式（5），（7）推得式（1）成立，由式（6），（8）推得式（2）成立．同理可推得式（3），（4）成立.

（b）若$W_{\partial(1)}$, $W_{\beta(2)}$拟相似且$W_{\partial(2)}$, $W_{\beta(1)}$拟相似．证法与（a）类似.

推论9 如果单射双边加权二次移位$W_\partial^{(2)}$, $W_\beta^{(2)}$拟相似，则单射双边加权移位W_∂, W_β拟相似.

证明 用$2i$和$2i+1$代替定理8中式（1）的i得

$$\sup_{2i>\max(2,2-k)}(\partial_{2(i-1)+k}\partial_{2(i-2)+k}\cdots\partial_{\chi(2i+k)})/(\beta_{2(i-1)}\beta_{2(i-2)}\cdots\beta_0)<\infty \quad (a)$$

$$\sup_{2i+1>\max(2,2-k)}(\partial_{2(i-1)+1+k}\partial_{2(i-2)+1+k}\cdots\partial_{\chi(2i+1+k)})/(\beta_{2(i-1)+1}\beta_{2(i-2)+1}\cdots\beta_1)<\infty \quad (b)$$

由式（a），（b）相乘可推得

$$\sup_{2i>\max(1,1-k)}(\partial_0\partial_1\cdots\partial_{2i-1+k})/(\beta_0\beta_1\cdots\beta_{2i-1})<\infty \quad (c)$$

用$2i+2$代替定理8中式（1）的i得

$$\sup_{2i+2>\max(2,2-k)}(\partial_{2i+k}\partial_{2(i-1)+k}\cdots\partial_{\chi(2i+2+k)})/(\beta_{2i}\beta_{2(i-1)}\cdots\beta_0)<\infty \quad (d)$$

由式（b），（d）相乘可推得

$$\sup_{2i+1>\max(1,1-k)} (\partial_0\partial_1\cdots\partial_{(2i+1)-1+k})/(\beta_0\beta_1\cdots\beta_{(2i+1)-1})<\infty \quad (e)$$

由式（c），（e）得引理2中第一个不等式成立．同理由定理8中式（2），（3），（4）可推推得引理2中其余三个不等式成立，因此W_i，W_β拟相似．

林辰教授详细审阅了本文原稿，特此致谢！

参考文献

〔1〕孙善利，辽宁大学学报，1987年第一期，1－7．

〔2〕L·A·Fialkow, Acta Sci·Math., 39(1977), 65—85.

〔3〕孟南，数学年刊，9（A），2:110—118.

〔4〕严子锟，科学通报，33(1988)，21：1677—1678．

〔5〕L·A·Fialkow, Tran.Amer.Math.Soc., 243(1978) 147—168.

Quasisimilarity of Weighted Shifts of Multiplicity *N* and Degree *m*

Yan Zikun

(Fujian Teachers University, Fuzhou)

Abstract

In this article, We show that quasisimilar injective bilateral weighted shifts of multiplicity N and degree m have equal essential spectra and show that quasisimilar injective unilateral weighted shifts of multiplicity N and degree m are similar. It is also gived that necessary and sufficient conditions for two injective bilateral weighted shifts of degree 2 to be quasisimilar.

(from 372)

ii) If X is a reflexive and $f\in X$ such that $\lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{T(\tau)f-f}{\tau^2}\right\|<\infty$ then $f\in D(A)$.

Theorem 2 If X is a reflexive Banach space, then $C(t)$ is saturated in X with order $O(t^2)$ $(t\to 0)$ and $D(A)$ is its saturation class.

Theorem 3 For general case, $C(t)$ is saturated in X with order $O(t^2)$ $(t\to 0)$ and its saturation class is $D(A)$, here $D(A)$ is endowed with norm $\|f\|_{D(A)}=\|f\|+\|Af\|$, for $f\in D(A)$.

Referece

〔1〕D. Lutz, Strongly continuous operator function, in "Functional Analysisy" Proc, Conf., Dubrovnik, Yugoslavia, 1981, 73—97, Lect. Notes in Math. No. 948, 1982.

〔2〕Sen-Yen Shaw, On W*-Continuous Cosine Operator Functions J. Func. Anal. Vol. 66, 73-95 (1986).