第11卷 第3期
1991年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.3
Aug. 1991

半线性椭圆组的外问题解的非存在性定理

刘秀璞
(河北大学，保定)

§1 引 言

设 $\Omega\subset R^n$ 是有界域，它的边界 $\partial\Omega$ 充分光滑.

Похожаев[1] 给出了边值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda f(u) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

的解 u 的一个积分恒等式. Wei-ming Ni 和 J. Serrin[2] 对半线性方程 $-\Delta u=f(u)$ 在 $R^n\setminus\{o\}$ 中的球对称奇异解的非存在性问题进行了研究. 文献〔3〕给出了拟线性 Euler 方程 $D_i(F_i(x,u,Du))=F_u(x,u,Du)$ 在 R^n 中解的非存在性定理.

本文将在无界区域 $\Omega'=R^n\setminus\Omega$ 内，考虑半线性椭圆方程组的 Dirichlet 外问题：

$$(*)\qquad\begin{cases} -\Delta u^l=f^l(u^1,u^2,\cdots,u^N)+\lambda u & x\in\Omega' \\ u^l=0, \quad \text{在 } \partial\Omega' \text{ 上}, & l=1,2,\cdots,N. \end{cases}$$

其中 $\{f^1,f^2,\cdots,f^N\}=\mathrm{grad}F(u^1,u^2,\cdots,u^N)$，$f^l\in C(R^n)$，$F(0,0,\cdots,0)=0$. 证明了 $(*)$ 的解 u 满足如下积分恒等式:

$$n\int_{\Omega'}F\mathrm{d}x+(1-\frac{n}{2})\int_{\Omega'}|Du|^2\mathrm{d}x+\frac{n\lambda}{2}\int_{\Omega'}|u|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega'}(x,\nu)|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2\mathrm{d}s \qquad (1)$$

$$n\int_{\Omega'}F\mathrm{d}x+(1-\frac{n}{2})\int_{\Omega'}u^kf^k\mathrm{d}x+\lambda\int_{\Omega'}|u|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega'}(x,\nu)|\frac{\partial u}{\partial y}|^2\mathrm{d}s \qquad (2)$$

$$[n+(1-\frac{n}{2})(p+1)]\int_{\Omega'}F\mathrm{d}x+\lambda\int_{\Omega'}|u|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega'}(x,\nu)|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2\mathrm{d}s \qquad (3)$$

这里 $u=\{u^1,u^2,\cdots,u^N\}$；$|u|=[\sum_{l=1}^N(u^l)^2]^{1/2}$；$|\frac{\partial u}{\partial\nu}|=[\sum_{l=1}^N(\frac{\partial u^l}{\partial\nu})^2]^{1/2}$；$|Du|=[\sum_{l=1}^N\sum_{i=1}^n(\frac{\partial u^l}{\partial x_i})^2]^{1/2}$；$\nu$ 为 $\partial\Omega'$ 上的单位外法向量. 在§3里，给出了 $(*)$ 的非凡解的不存在性定理. 值得指出的是，定理的结论和 Dirichlet 内问题[4]的情况不同.

§2 积分恒等式的建立

记中心为原点，半径为 R 的球为 B_R，在〔5〕中，证明了以下引理及其推论.

引理 设 $\mathbf{v}\in L'(\Omega')$，则存在一列实数 $R_m\to\infty$，使当 $m\to\infty$ 时，$R_m\int_{\partial B_{R_m}}|\mathbf{v}|\mathrm{d}s\to0$.

推论 如果 $\mathbf{v}\in L'(\Omega')$，则存在一列实数 $R_m\to\infty$，使当 $m\to\infty$ 时，$\int_{\partial B_{R_m}}|\mathbf{v}|\mathrm{d}s\to0$.

现在来建立积分恒等式.

* 1989年9月23日收到.

定理 1 设 $u^1, u^2, \cdots, u^N$ 为问题（$*$）的解，且 $|u|$，$|Du| \in L^2(\Omega')$，$F(u^1, u^2, \cdots, u^N) \in L^1(\Omega')$．则积分恒等式（1）成立．

证明 作球 $B_R \supset \Omega$，记 $\Omega_R = B_R \setminus \Omega$．

由Green公式或方程组（$*$）

$$-\int_{\Omega_R} x_i D_i u^k (f^l + \lambda u^l) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega_R} x_i D_i u^k \frac{\partial u^l}{\partial v} \mathrm{d}s - \int_{\Omega_R} D_j (x_i D_i u^k) \cdot D_j u^l \mathrm{d}x$$

$$= \int_{\partial\Omega} x_i D_i u^k \frac{\partial u^l}{\partial v} \mathrm{d}v + \int_{\partial B_R} x_i D_i u^k \frac{\partial u^L}{\partial v} \mathrm{d}s - \int_{\Omega_R} D_j u^k D_j u^l \mathrm{d}x$$

$$- \int_{\Omega_R} x_i D_{ij} u^k \cdot D_j u^l \mathrm{d}x \,. \tag{4}$$

在（4）式中令 $l = k$，然后将 k 从 1 到 N 叠加：

$$左端 = -\int_{\Omega_R} x_i f^k D_i u^k \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega_R} x_i D_i |u|^2 \mathrm{d}x$$

$$= -\int_{\Omega_R} x_i f^k D_i u^k \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{2} \int_{\partial B_R} R\, |u|^2 \mathrm{d}s + \frac{n\lambda}{2} \int_{\Omega_R} |u|^2 \mathrm{d}x \tag{5}$$

这里利用了在 $\partial\Omega'$ 上，$|u|^2 = 0$，在 ∂B_R 上，$x_i v_i = R v_i v_i = R$．

$$右端 = \int_{\partial\Omega} x_i D_i u^k \frac{\partial u^k}{\partial v} \mathrm{d}s + \int_{B_R} x_i D_i u^k \frac{\partial u^k}{\partial v} \mathrm{d}s - \int_{\Omega_R} |Du|^2 \mathrm{d}x - \int_{\Omega_R} x_i D_{ij} u^k D_j u^k \mathrm{d}x \tag{6}$$

由于 $u^k|_{\partial\Omega'} = 0$，所以在 $\partial\Omega'$ 上，$D_i u^k = \dfrac{\partial u^k}{\partial v} v_i$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$．

从而得到：

$$\int_{\partial\Omega'} x_i D_i u^k \frac{\partial u^k}{\partial v} \mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega'} (x, v) \left|\frac{\partial u}{\partial v}\right|^2 \mathrm{d}s \tag{7}$$

$$\int_{\partial B_R} x_i D_i u^k \frac{\partial u^k}{\partial v} \mathrm{d}s = \int_{\partial B_R} R \left|\frac{\partial u}{\partial v}\right|^3 \mathrm{d}s \tag{8}$$

$$-\int_{\Omega_R} x_i D_{ij} u^k \cdot D_j u^k \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_R} D_i (x_i |Du|^2) \mathrm{d}x + \frac{n}{2} \int_{\Omega_R} |Du|^2 \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x, v) \left|\frac{\partial u}{\partial v}\right|^2 \mathrm{d}s - \frac{1}{2} \int_{\partial B_R} R |Du|^2 \mathrm{d}s + \frac{n}{2} \int_{\Omega_R} |Du|^2 \mathrm{d}x \,. \tag{9}$$

将（7），（8），（9）代入（6）式，并结合（5）式有：

$$-\int_{\Omega_R} x_i f^k D_i u^k \mathrm{d}x + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_{\Omega_R} |Du|^2 \mathrm{d}x + \frac{n\lambda}{2} \int_{\Omega_R} |u|^2 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega'} (x, v) \left|\frac{\partial u}{\partial v}\right|^2 \mathrm{d}s + R \int_{\partial B_R} \left|\frac{\partial u}{\partial v}\right|^2 \mathrm{d}s - \frac{R}{2} \int_{\partial B_R} |Du|^2 \mathrm{d}s + \frac{R\lambda}{2} \int_{\partial B_R} |u|^2 \mathrm{d}s \,. \tag{10}$$

由于 $f^k D_i u^k = D_i F$，从而有：

$$-\int_{\Omega_R} x_i f^k D_i u^k \mathrm{d}x = -\int_{\Omega_R} x_i D_i F \mathrm{d}x = -R \int_{\partial B_R} F \mathrm{d}s + n \int_{\Omega_R} F \mathrm{d}x \,. \tag{11}$$

把（11）式代入（10）式，即得：

$$n \int_{\Omega_R} F \mathrm{d}x + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_{\Omega_R} |Du|^2 \mathrm{d}x + \frac{n\lambda}{2} \int_{\Omega_R} |u|^2 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x, v) \left|\frac{\partial u}{\partial v}\right|^2 \mathrm{d}s + R \int_{\partial B_R} \left|\frac{\partial u}{\partial v}\right|^2 \mathrm{d}s - \frac{R}{2} \int_{\partial B_R} |Du|^2 \mathrm{d}s + \frac{\lambda R}{2} \int_{\partial B_R} |u|^2 \mathrm{d}s + R \int_{\partial B_R} F \mathrm{d}s \tag{12}$$

根据定理 1 的条件，并注意到 $\left|\dfrac{\partial u}{\partial v}\right| \leqslant |Du|$，由引理知，存在一列实数 $R_m \to \infty$，使当 $m \to \infty$ 时，有：

$$R_m\int_{\partial B_{R_m}}\{|F|+|Du|^2+|u|^2\}\mathrm{d}s\to 0 \quad 及 \quad R_m\int_{\partial B_{R_m}}|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2\mathrm{d}s\to 0.$$

在（12）式中，取 $R=R_m$，再令 $m\to\infty$，即得恒等式（1）.

定理2 设 $u^1,u^2,\cdots,u^N$ 为问题（$*$）的解，$|u|$，$|Du|\in L^2(\Omega')$，$F(u^1,u^2,\cdots,u^N)$ $L^1(\Omega')$；且 f^l 为 p 次齐次函数，$p>1$，$l=1,2,\cdots N$. 则积分恒等式（2），（3）成立.

证明 由方程组（$*$）知 $F(u^1,u^2,\cdots,u^N)$ 是 $p+1$ 次齐次函数. 从而有：

$$u^kf^k=u^k\frac{\partial F}{\partial u^k}=(p+1)F\in L'(\Omega') \tag{13}$$

利用Green 公式得：

$$-\int_{\Omega_R}u^k(f+\lambda u^l)\mathrm{d}x=\int_{\Omega_R}u^k\Delta u^l\mathrm{d}x=\int_{\partial B_R}u^k\frac{\partial u^l}{\partial \nu}\mathrm{d}s-\int_{\Omega_R}Du^k\cdot Du^l\mathrm{d}x \tag{14}$$

在（14）式中令 $l=k$，然后将 k 从1到 N 叠加：

$$\int_{\Omega_R}|Du|^2\mathrm{d}x=\int_{\Omega_R}u^kf^k\mathrm{d}x+\lambda\int_{\Omega_R}|u|^2\mathrm{d}x+\int_{\partial B_R}u^k\frac{\partial u^k}{\partial \nu}\mathrm{d}s \tag{15}$$

在上式中，因为 $|u^k\frac{\partial u^k}{\partial \nu}|\leqslant\frac{1}{2}(|u|^2+|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2)\leqslant\frac{1}{2}(|u|^2+|Du|^2)$ 由引理的推论，仿定理1的证法即得：

$$\int_{\Omega'}|Du|^2\mathrm{d}x=\int_{\Omega'}u^kf^k\mathrm{d}x+\lambda\int_{\Omega'}|u|^2\mathrm{d}x \tag{16}$$

把（16）式代入（1）式，即得恒等式（2）. 再将（13）式代入（2）式，即得恒等式（3）.

§3 非存在性定理

定理3 设 Ω 为星形域，f^l 是 p 次齐次函数，$1<p<\frac{n+2}{n-2}$，$n\geqslant 3$. 那么当 $\lambda\geqslant\lambda^*$（$\lambda^*$ 的定义见（17）式）时，方程组（$*$）不存在满足 $|u|$，$|Du|\in L^2(\Omega')$，$F(u^1,u^2,\cdots,u^N)\in L^1(\Omega')$ 的非凡解.

证明 设 $u^l(l=1,2,\cdots,N)$ 是问题（$*$）的非凡解. 由于 Ω 是星形域，从而在 $\partial\Omega'$ 上有 $(x,\nu)<0$. 于是根据（3）式，我们有：

$$[n-\frac{n-2}{2}(p+1)]\int_{\Omega'}F\mathrm{d}x<-\lambda\int_{\Omega'}|u|^2\mathrm{d}x$$

考虑到 $\frac{n-2}{2}(p+1)<n$，进而有：

$$\int_{\Omega'}F\mathrm{d}x<[\frac{n-2}{2}(p+1)-n]^{-1}\lambda\int_{\Omega'}|u|^2\mathrm{d}x$$

今设 λ_1 是算子 $-\Delta$ 的最小特征值，再利用（13）与（16）式得到：

$$\lambda_1\int_{\Omega'}|u|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega'}|Du|^2\mathrm{d}x=(p+1)\int_{\Omega'}F\mathrm{d}x+\lambda\int_{\Omega'}|u|^2\mathrm{d}x$$

$$<(1+[\frac{n-2}{2}(p+1)-n]^{-1}(p+1))\lambda\int_{\Omega'}|u|^2\mathrm{d}x$$

易知

$$\lambda<(1+[\frac{n-2}{2}(p+1)-n]^{-1}(p+1))^{-1}\lambda_1\equiv\lambda^* \tag{17}$$

定理3证毕.

推论 3.1 在定理 3 的假设下，如存在常数 $c>0$，使

$$|F(u^1,u^2,\cdots,u^N)|\leqslant c|u|^{\ +1} \qquad (18)$$

那么当 $\lambda\geqslant\lambda^*$ 时，方程组（$*$）不存在满足 $|u|$，$|Du|\in L^2(\Omega')$ 的非凡解．

证明 若方程组（$*$）有非凡解满足 $|u|$，$|Du|\in L^2(\Omega')$，那么对 $l=1,2,\cdots,N$，u^l，$Du^l\in L^2(\Omega')$．再由Sobolev 嵌入定理知，当 $1\leqslant p\leqslant\frac{n+2}{n-2}$ 时，$u^l\in L^{p+1}(\Omega')$；从而有 $(u^l)^2\in L^{\frac{p+1}{2}}(\Omega')$．由此易知 $|u|\in L^{p+1}(\Omega')$．再利用（18）式便知，$F(u^1,u^2,\cdots,u^N)$ 64 $L^1(\Omega')$．这与定理 3 矛盾．推论 3.1 得证．

定理 4 设 Ω 为星形域，$n\geqslant3$，$p=\frac{n+2}{n-2}$，$f^1,f^2,\cdots,f^N$ 为 p 次齐次函数，且存在常数 $a_1,a_2,\cdots,a_N$，使对任意非负数 $t_1,t_2,\cdots,t_N$，$a_lf^l(t_1,t_2,\cdots t_N)\geqslant0$；$a_lf^l(t_1,t_2,\cdots,t_N)=0$ 意味着 $t_1=t_2=\cdots=t_N=0$．那么当 $\lambda\geqslant0$ 时，方程组（$*$）不存在满足 $|u|$，$|Du|\in L^2(\Omega')$，$F(u^1,u^2,\cdots,u^N)\in L^1(\Omega')$ 的非凡正解．

注：$u^1,u^2,\cdots,u^N$ 叫方程组的正解，指 $u^1\geqslant0$，$u^2\geqslant0,\cdots,u^N\geqslant0$．

证明 设 u^l（$l=1,2,\cdots,N$）是问题（$*$）的非凡正解．由 Ω 是星形域，$p=\frac{n+2}{n-2}$，$|u|$，$|Du|\in L^2(\Omega')$，$F(u^1,u^2,\cdots,u^N)\in L^1(\Omega')$．所以根据（3）式，我们有：

$$\lambda\int_{\Omega'}|u|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega'}(x,\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\mathrm{d}s\leqslant0$$

由上式知 $\lambda\leqslant0$．

若 $\lambda=0$，则必有 $\frac{\partial u^l}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega'}=0$．

借助Green公式与方程组（$*$）得：$\int_{\partial\Omega'}\frac{\partial u^l}{\partial\nu}\mathrm{d}s=-\int_{\Omega'}f^l\mathrm{d}x=0$．从而有 $\int_{\Omega'}a_lf^l\mathrm{d}x=0$．根据 f^l 的连续性与定理假设有：$a_lf^l\equiv0$．进而得 $u^1\equiv u^2\equiv\cdots\equiv u^N\equiv0$，矛盾！故 $\lambda<0$．定理 4 证毕．

推论 4.1 在定理 4 的条件下，如存在常数 $C>0$，使 $|F(u^1,u^2,\cdots,u^N)|\leqslant c|u|^{p+1}$．那么当 $\lambda\geqslant0$ 时，方程组（$*$）不存在满足 $|u|$，$|Du|\in L^2(\Omega')$ 的非凡正解．

证明与推论 3.1 完全相似，故从略．

由以上定理及推论的证明，类似地可得到下面的定理和推论．（从略）

定理 5 设 Ω 为星形域，$n\geqslant3$，$p>\frac{n+2}{n-2}$；$f^1,f^2,\cdots,f^N$ 为 p 次齐次函数，对不同时为零的任意非负数 $t_1,t_2,\cdots,t_N$，$F(t_1,t_2,\cdots,t_N)<0$．那么当 $\lambda\geqslant0$ 时，方程组（$*$）不存在满足 $|u|$，$|Du|\in L^2(\Omega')$，$F(u^1,u^2,\cdots,u^N)\in L^1(\Omega')$ 的非凡正解．

定理 6 设 Ω 为星形域．$n\geqslant3$，$\lambda\geqslant0$．连续函数 $f^1,f^2,\cdots,f^N$ 满足如下条件：

i 对任意实数 $t_1,t_2,\cdots,t_N$，

$$t_1(f^1+\lambda t_1)\geqslant0,\ t_2(f^2+\lambda t_2)\geqslant0,\cdots,t_N(f^N+\lambda t_N)\geqslant0.$$

ii 对任意实数 $t_1,t_2,\cdots,t_N$，

$$\frac{2n}{n-2}F-t_l(f^l+\lambda t_l)\geqslant0.\ l=1,2,\cdots,N.$$

那么方程组（$*$）不存在满足 $|u|$，$|Du|\in L^2(\Omega')$，$F(u^1,u^2,\cdots,u^N)\in L^l(\Omega')$ 的非凡正解．

推论6·1 在定理6的条件下，如存在常数 $c>0$，使

$$|F(u^1, u^2, \cdots, u^N)| \leqslant c|u|^{p+1}$$

那么方程组（*）不存在满足 $|u|$，$|Du| \in L^2(\Omega')$ 的非凡正解.

参 考 文 献

〔1〕Похожаев, С.И., ДАН СССР, ТОМ 165, No.1 (1965), 36—39.

〔2〕Ni, W.M., and Serrin, J., Comm. Puré Appl. Math. 39 (1986), 379-399.

〔3〕Shen Yaotan and Ma Runian, 数学进展 18, 2 (1989), 247-248.

〔4〕陈宝耀，数学年刊，9 A，4 (1988)，482—487.

〔5〕刘秀璞，河北大学学报，3 (1990).

Nonexistence Theorems for Solutions of Exterior Problems of Semilinear Elliptic Systems

Liu Xiupu

(Hebei University, Baoding)

Abstract

In this paper for the solutions of exterior Dirichlet problems of semilinear elliptic systems $-\Delta u = f(u) \pm \lambda u$. We have established three integral identities and given some nonexistence theorems.