第11卷 第3期
1991年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.3
Aug. 1991

四阶半线性热方程解的blow-up *

文如庆
（中南工业大学，长沙）

摘要

在这篇文章中，我们研究四阶半线性热方程

$$a(x,t)\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_t u)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta_t u))=f(u,\Delta_t u)$$

在已给初边界条件下解的爆破，我们利用凸性方法证明了上述问题的解，在有限时内变为无穷，假若$a(x,t)$，$a_{ij}(x)$，$f(u,\Delta_t u)$ 与初边值满足某些条件.

§1 引言.

由于非线性热方程解的爆破问题在实际与理论上都具有重要的意义，近年来国内外很多学者对此进行了一系列的研究（[1],[2],[3]）、但多数工作都致力于二阶方程的情形，关于高阶非线性方程解的爆破问题的研究还很少看到. 本文研究了四阶半线性热方程解的爆破问题. 利用凸性方法，引进适当的辅助函数，证明了该方程的初边值问题的解在有限时间内爆破.

设Ω是R^n中的有界区域，边界$\partial\Omega$充分光滑，$\frac{\partial u}{\partial \nu}$表示$u$在$\partial\Omega$的外法向导数，记$x=(x_1,\cdots x_n)\in R^n$. $Q=\Omega\times(0,T)$，$\partial Q=\partial\Omega\times(0,T)$，$\Delta_t=\frac{\partial}{\partial t}-\Delta=\frac{\partial}{\partial t}-(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2})$.

考虑如下问题

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases} a(x,t)\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_t u)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta_t u))=f(u,\Delta_t u), & \text{在}Q\text{内}.\\ u|_{t=0}=u_0(x),\ \Delta_t u|_{t=0}=u_1(x), & \text{在}\Omega\text{内}\\ (\frac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma_1 u)|_{\partial Q}=h(u),\quad (\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta_t u)+\sigma_2\Delta_t u)|_{\partial Q}=g(\Delta_t u), & \text{在}\partial Q\text{上}.\\ (0<\sigma_1<\infty,\ 0<\sigma_2<\infty) & \end{cases}$$

我们约定条件（E）为：

(E_1) $a\equiv a(x,t)\in C^2(\theta)$，且存在$a_0,M_1,M_2>0$，使得在$Q$上，有$M_1\geqslant a\geqslant a_0>0$，$-M_2\leqslant a_t'<0$.

(E_2) $a_{ij}\equiv a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$ $(i,j=1,2,\cdots n)$ 仅为x的连续可微函数，且$\forall x\in\Omega$，$\xi\in R^n$，$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ $(\mu>0)$.

* 1989年9月12日收到。

(E_3) $f(u,v)$ ($u,v\in[0,\infty)$) 具有一阶连续偏导数，f, f_u', f_v' 关于 u,v 一致有界，且 $f>0$，$f_u'>0$，$f_v'>0$.

(E_4) $h(u)>0$，$g(v)>0$ 在 ∂Q 上有连续导数，且 $h'(u)<\sigma_1$，$g'(v)<\sigma_2$，$u_0(x)\in C^4(\Omega)$，$u_1(x)\in C^2(\Omega)$．$u_0(x)>0$，$u_1(x)>0$ 且满足各相容性条件，还设在 Q 上有

$$\Delta u_0(x)+u_1(x)>0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta_t u_0))+f(u_0,\Delta_t u_0)>0.$$

这里还指出一下，可以证明问题（Ⅰ）在一定的条件下存在局部的光滑解（[4]，[5]），但我们主要集中注意于整体解的不存在性，或解的有限时间的 blow-up.

若令 $\Delta_t u=v$，则问题（Ⅰ）改写为

$$(\mathrm{II})\quad\begin{cases} u_t-\Delta u=v & (1.1)\\ a\dfrac{\partial v}{\partial t}-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j})=f(u,v) & (1.2)\\ u|_{t=0}=u_0(x),\quad v|_{t=0}=u_1(x)\equiv v_0(x) & (1.3)\\ (\dfrac{\partial u}{\partial \gamma}+\sigma_1 u)|_{\partial Q}=h(u),\quad (\dfrac{\partial v}{\partial \gamma}+\sigma_2 v)|_{\partial Q}=g(v) & (1.4)\end{cases}$$

这是关于 u,v 的耦合方程组的定解问题.

§2 几个预备定理

引理1 设问题（Ⅱ）在 Q 上存在光滑解 u,v，又条件（E）成立，则在 Q 内 $u(x,t)\geqslant 0$，$v(x,t)\geqslant 0$.

证明 考虑一个修改问题

$$(\mathrm{II})'\quad\begin{array}{ll} u_t-\Delta u=v & (1.1)'\\ a\dfrac{\partial v}{\partial t}-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i})=\tilde f(u,v), & (1.2)'\\ u|_{t=0}=u_0(x),\quad v|_{t=0}=v_0(x), & (1.3)'\\ (\dfrac{\partial u}{\partial \gamma}+\sigma_1 u)|_{\partial Q}=h(u),\quad (\dfrac{\partial v}{\partial \gamma}+\sigma_2 v)|_{\partial Q}=g(v). & (1.4)'\end{array}$$

这里

$$\tilde f(u,v)=\begin{cases} f(u,v), & 当\ u\geqslant 0,\quad v\geqslant 0.\\ f(-u,-v), & 当\ u<0,\quad v<0.\\ f(u,-v), & 当\ u\geqslant 0,\quad v<0.\\ f(-u,v), & 当\ u<0,\quad v\geqslant 0.\end{cases}$$

先证在 Q 内 $v(x,t)\geqslant 0$. 若不然，即 $v<0$. 设在 Q 中某点 $P_0(x_0,t_0)$ 达到它的负的极小值，则在 P_0 有

$$\frac{\partial v}{\partial x_j}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\geqslant 0,\quad \frac{\partial v}{\partial t}\leqslant 0.$$

又由 [6] 可推得在 P_0 有

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\geqslant 0.$$

因此（1.2）′式左边在在P_0有

$$a\frac{\partial v}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\leqslant 0.$$

而（1.2）′式右边$f(u,v)>0$，矛盾.

再设v在∂Q上之某点$P_0'(x_0',t_0')$达负的极小值，则有$\frac{\partial v}{\partial y}\big|_{P_0'}\leqslant 0$，而

$$v\big|_{p_0'\in\partial Q}=\frac{1}{\sigma^2}\left(g(v)-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Big|_{p_0'\in\partial Q}>0.$$

所以在Q内$v(x,t)\geqslant 0$. 类似地推出在Q内$u(x,t)\geqslant 0$.

因在Q内$u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$，故$\tilde{f}(u,v)=f(u,v)$. 所以u, v也是（Ⅱ）的解. 从而（Ⅱ）的解在Q内有

$$u(x,t)\geqslant 0,\qquad v(x,t)\geqslant 0.$$

引理2 设问题（Ⅱ）在Q上的光滑解为u,v，又条件（E）成立，则在Q内$u_t\geqslant 0$, $v_t\geqslant 0$.

证明 对（Ⅱ）关于t求导，令$w_1=\frac{\partial u}{\partial t}$, $w_2=\frac{\partial v}{\partial t}$ 则得

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases}\dfrac{\partial w_1}{\partial t}-\Delta w_1=w_2 & (2.1)\\[2mm] a\dfrac{\partial w_2}{\partial t}-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial w_2}{\partial x_j}=f_u'w_1+(f_v'-a_t')w_2 & (2.2)\\[2mm] w_1\big|_{t=0}=\Delta u_0+u_1,\quad w_2\big|_{t=0}=\dfrac{1}{a}\Big[\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial v_0}{\partial x_j}\Big)+f(u_0,v_0)\Big] & (2.3)\\[2mm] \Big(\dfrac{\partial w_1}{\partial y}+\sigma_1 w_1\Big)\Big|_{\partial Q}=h'(u)w_1,\quad \Big(\dfrac{\partial w_2}{\partial y}+\sigma_2 w_2\Big)\Big|_{\partial Q}=g'(v)w_2 & (2.4)\end{cases}$$

令$\hat{w}_1=w_1+\varepsilon(1+at)$, $\hat{w}_2=w_2+\varepsilon(1+at)$, a为待定参数. 由条件（E_4）有$\hat{w}_1\big|_{t=0}=w_1\big|_{t=0}+\varepsilon>0$, $\hat{w}_2\big|_{t=0}=w_2\big|_{t=0}+\varepsilon>0$. 我们先证必有适当的$\delta>0$，当$\forall\, t>0$, $0<t<\delta$时，有$\hat{w}_2>0$成立. 假若不然，则必有最小的t_0, $0<t_0<\delta$，且对此t_0有$x_0\in\Omega$，对$p_0(x_0,t_0)$有$\hat{w}_2\big|_{p_0}=0$. 使$\hat{w}_2(x,t)$在$[0,t_0]$上达到最小值，即

$$\frac{\partial\hat{w}_2}{\partial x_j}\Big|_{p_0}\geqslant 0,\qquad \frac{\partial^2\hat{w}_2}{\partial x_i^2}\Big|_{p_0}\geqslant 0,\qquad \frac{\partial\hat{w}_2}{\partial t}\Big|_{p_0}\leqslant 0.$$

又

$$\frac{\partial\hat{w}_2}{\partial t}=\frac{\partial w_2}{\partial t}+\varepsilon a,\qquad \frac{\partial\hat{w}_2}{\partial x_j}=\frac{\partial w_2}{\partial x_j},\qquad \frac{\partial^2\hat{w}_2}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_i^2}.$$

则（2.2）化为

$$a\frac{\partial\hat{w}_2}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2\hat{w}_2}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial\hat{w}_2}{\partial x_j}=\varepsilon a a+f_u'\hat{w}_1+(f_v'-a_t')\hat{w}_2-\varepsilon(1+at)(f_u'+f_v'-a_t'),\tag{2.5}$$

令

$$0<f_u'\leqslant L_1,\quad 0<f_v'\leqslant L_2,\quad 0<f_u'+f_v'-a_t'\leqslant L_1+L_2+M_2\equiv L$$

下面分两种情况进行讨论：

（1）若$\hat{w}_1(x_0,t_0)\geqslant 0$，则（2.5）式右边，当$t_0<\delta=\frac{aa_0-L}{aL}$（取$aa_0>L$）时，大于零. 而左边小于或等于零，矛盾. 从而，当$t\in(0,\delta)$时，$\hat{w}_2>0$.

（ii）若$\hat{w}_1(x_0,t_0)<0$，则在$\Omega\times[0,t_0]$中必有一点(x_1,t_1)，使$\hat{w}_1(x_1,t_1)=0$，而$t_1<t_0$，于是当$t\leqslant t_1$时，有$\hat{w}_2(x,t)>0$。利用与（i）相同的方法可知，$\hat{w}_2$的极小值点$p_1(x_1,t_1)$也只能属于∂Q，下证$\hat{w}_2$的极小值点也不属于∂Q。

根据边界条件（2.4）可得在∂Q上有

$$\left(\frac{\partial\hat{w}_2}{\partial\gamma}+\sigma_2\hat{w}_2\right)=\varepsilon(1+at)(\sigma_2-g'(v))+g'(v)\hat{w}_2\ . \tag{2.6}$$

对情况（i），极小值点$p_0(x_0,t_0)$使$\hat{w}_2(x_0,t_0)=0$，$\hat{w}_1(x_0,t_0)\geqslant0$，从而（2.6）式左边在$p_0$有$\left(\frac{\partial\hat{w}_2}{\partial\gamma}+\sigma_2\hat{w}_2\right)\Big|_{p_0}<0$，又由条件$\sigma_2-g'(v)>0$，右边大于零。因此极小值点$p_0$也不属于边界$\partial Q$。对于（ii）通过类似的讨论可得同样的结论。综上所述，当$\tau\in[0,\delta]$时，在$\Omega\times[0,\tau]$中，$\hat{w}_2>0$，同样可得$\hat{w}_1>0$。令$\varepsilon\to0$可知在$\Omega\times[0,\tau]$中恒有$w_1\geqslant0$，$w_2\geqslant0$。依同样的论证重复进行有限次，必有$n\tau\geqslant T$，从而$w_1\geqslant0$。$w_2\geqslant0$。在Q内成立，即在Q内有$u_t\geqslant0$，$v_t\geqslant0$。

引理3 设函数$I(t)\in C^2[0,\infty)$，$I(0)>0$，$I'(0)<0$。$I''(t)\leqslant0$，$\forall\ t\in[0,\infty)$。则存在T_0，$0<T_0\leqslant-\frac{I(0)}{I'(0)}$使$I(T_0)=0$。

证明 由假设有$I(t)\leqslant I(0)+I'(t)t$，$t\in[0,\infty)$，从而即得结论。

§3 主要结果

作辅助函数

$$I(t)=\int_\Omega a\varphi(v)\mathrm{d}x-\int_0^t\int_\Omega a'_\tau\varphi(v)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_\Omega\psi(u)\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

其中$\varphi,\psi\in C^3[0,\infty)$为待选函数。

对（3.1）关于t求导

$$I'(t)=\int_\Omega a\varphi'(v)v_t\mathrm{d}x+\int_\Omega\psi'(u)u_t\mathrm{d}x \tag{3.2}$$

$$=\int_{\partial\Omega}\varphi'(v)\sum a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}n_i dl-\int_\Omega\varphi''(v)\sum a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\mathrm{d}x+\int_\Omega\varphi'(v)f(u,v)\mathrm{d}x$$

$$+\int_{\partial\Omega}\psi'(u)\sum\frac{\partial u}{\partial x_i}h_i dl-\int_\Omega\psi''(u)\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\psi'(u)v\mathrm{d}x \tag{3.3}$$

对（3.2）关于t求导，经过计算得

$$I''(t)=\int_\Omega a\varphi''(v)v_t^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\psi''(u)u_t^2\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\varphi'(v)\sum a_{ij}\frac{\partial v_t}{\partial x_j}n_i\mathrm{d}l$$

$$-\int_\Omega\varphi''(v)\sum a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v_t}{\partial x_j}\mathrm{d}x+\int_\Omega\varphi'(v)[f'_u u_t+f'_v v_t]\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\psi'(u)\sum\frac{\partial u_t}{\partial x_j}n_i\mathrm{d}l$$

$$-\int_\Omega\psi''\sum\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}\mathrm{d}x+\int_\Omega\psi'(u)v_t\mathrm{d}x, \tag{3.4}$$

将（3.4）式二倍再减去（3.3）式关于t的导数，得

$$I''(t)=2\int_\Omega a\varphi''v_t^2\mathrm{d}x+2\int_\Omega\psi''u_t^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\varphi'''\ v_t\sum a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\mathrm{d}x$$

$$+\int_\Omega\psi'''u_t\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}[\varphi''(\sigma_2v-g)+\varphi'(g'-\sigma_2)]v_t\mathrm{d}l$$

$$+\int_{\partial\Omega}[\psi''(\sigma_1u-h)+\psi'(h'-\sigma_1)]u_t\mathrm{d}l+\int_\Omega[\varphi'f'_v+\psi'-\varphi''f]v_t\mathrm{d}x$$

$$+\int_\Omega[\varphi' f'_u-\psi'' v]u_t\mathrm{d}x \tag{3.5}$$

定理 设条件（E）成立．若存在 $\varphi(v)\in C^3[0,\infty)$，$\psi(u)\in C^3[0,\infty)$，且对$\forall\ v\in[0,\infty)$，$\forall\ u\in[0,\infty)$ 满足（F）条件：

（F_1） $\varphi(v)\geqslant0,\ \varphi(v)\not\equiv0,\ v\not\equiv0$ 时，$\varphi'(v)>0,\ \varphi''(v)\geqslant0,\ \varphi'''(v)\geqslant0.$

$\psi(u)\geqslant0,\ \psi(u)\not\equiv0,\ \psi'(u)\geqslant0,\ u\not\equiv0$ 时，$\psi'(u)>0,\ \psi''(u)\geqslant0,\ \psi'''(u)\geqslant0.$

（F_2） $\varphi''(v)(\sigma_2 v-g(v))+\varphi'(v)(g'(v)-\sigma_2)\geqslant0,$

$\psi''(u)(\sigma_1 u-h(u))+\psi'(u)(h'(u)-\sigma_1)\geqslant0,$

（F_3） $\varphi'(v)f'_v+\psi'(u)-\varphi''(v)f\geqslant0.$

$\varphi'(v)f'_u-\psi''(u)v\geqslant0.$

（F_4） $\exists\ a_0>0$，使$\varphi''(v)\varphi(v)\geqslant\dfrac{a_0+1}{2}[\varphi'(v)]^2,\ \psi''(u)\psi(u)\geqslant\dfrac{a_0+1}{2}[\psi'(u)]^2.$

则存在$T_0>0$，使得当 $t\to T_0^-$ 时，$T_0\leqslant T$

$$\lim_{t\to T_0}\sup_{x\in\Omega}[u(x,t)+v(x,t)]=+\infty.$$

证明 由（3.1），（3.2），（3.5）可知

$$I(0)=\int_\Omega a\varphi(v_0)\mathrm{d}x+\int_\Omega\psi(u_0)\mathrm{d}x>0,$$

$$I'(0)=\int_\Omega a\varphi'(v_0)v_t|_{t=0}\mathrm{d}x+\int_\Omega\psi'(u_0)u_t|_{t=0}\mathrm{d}x>0.$$

$$I''(t)\geqslant2\int_\Omega\varphi''(v)v_t^2\mathrm{d}x+2\int_\Omega\psi''(u)u_t^2\mathrm{d}x$$

令 $J(t)=[I(t)]^{-a_0}$，此 a_0 即（F_4）中的a_0．于是有

$$J(0)=[I(0)]^{-a_0}>0,$$

$$J'(t)=-a_0[I(t)]^{-a_0-1}I'(t),$$

$$J'(0)<0,$$

$$J''(t)=a_0I(t)^{-a_0-2}[(a_0+1)[I'(t)]^2-I(t)I''(t)].$$

又

$$I(t)I''(t)\geqslant(2\int_\Omega a\varphi''(v)v_t^2\mathrm{d}x+2\int_\Omega\psi''(u)u_t^2\mathrm{d}x)(\int_\Omega a\varphi(v)\mathrm{d}x-\int_0^t\int_\Omega a'_\tau\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\int_\Omega\psi\mathrm{d}x)$$

$$\geqslant2(\int_\Omega a\varphi''(v)v_t^2\mathrm{d}x)(\int_\Omega a\varphi(v)\mathrm{d}x)+2(\int_\Omega\psi''(u)u_t^2\mathrm{d}x)(\int_\Omega\psi(u)\mathrm{d}x).$$

而

$$[I'(t)]^2\leqslant2[(\int_\Omega a\varphi'(v)v_t\mathrm{d}x)^2+(\int_\Omega\psi'(u)u_t\mathrm{d}x)^2]$$

据条件（F_4）与Schwarz 不等式得

$$I(t)I''(t)\geqslant(\int_\Omega\sqrt{2\varphi\varphi''}\ av_t\mathrm{d}x)^2+(\int_\Omega\sqrt{2\psi\psi'}\ u_t\mathrm{d}x)^2\geqslant(1+a_0)[I'(t)]^2.$$

所以

$$J''(t)\leqslant0.$$

利用引理3 可知存在 T_0，$0<T_0\leqslant-\dfrac{J(0)}{J'(0)}=\dfrac{I(0)}{a_0I'(0)}$ 当$t\to T_0^-$时，$J(t)\to0$．从而 $I(t)\to+\infty$．于是 $I(t)$ 之三项：$\int_\Omega a\varphi(v)\mathrm{d}x$，$-\int_0^t\int_\Omega a'_\tau\varphi(v)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$，$\int_\Omega\psi(u)\mathrm{d}x$．中至少有一项趋于$+\infty$．由于 $a>0$，$a'_t<0$ 以及$\varphi(v)$，$\psi(u)$ 所满足之条件（F）可知，前两项之一趋于$+\infty$蕴含着$v\to+\infty$，而后一项趋于$+\infty$，蕴含着$u\to+\infty$．所以

$$\lim_{t\to T_0^-}\sup_{x\in\Omega}[u(x,t)+v(x,t)]=+\infty.$$

附注 满足条件（F）的待选函数 $\varphi(v)$，$\psi(u)$ 有很多，如〔7〕所述．选取 $\varphi(v)=v^l$，$\psi(u)=u^l$（$l>2$）较简单．

参 考 文 献

〔1〕C. V. Pao, Applicable Analysis, 10.1 (1980), 5—13.

〔2〕A. Friedman and B. Mcleod, Indiana Univ, Math, J. 34 (1985) 425—447.

〔3〕管志成，数学年刊，5 A，2 (1984)，177—180.

〔4〕严子谦，数学年刊，3 (1) (1982)，67—78.

〔5〕文如庆，湖南数学年刊，4 (2) (1984)，110—117.

〔6〕A. Friedman，抛物型编微分方程（夏宗伟译），科学出版社，1984.

〔7〕邓聚成，应用数学学报，10 (4) (1987)，450—456.

The blow-up of the Solution of the Fourth-Order Semilinear Heat Equation

Wen Ruqing

(Middle Sauth Industrial University, Changsha)

Abstract

In this paper, we study the blow-up of the solution of the fourth-order semilinear heat equation

$$a(x,t)\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_t u)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta_t u)\right)=f(u,\Delta_t u)$$

with given initial and boundary condition. Using concavity method, we proved that the solution of above problems become infinite in finite time, provided $a(x,t)$, $a_{ij}(x)$, $f(u,\Delta_t u)$ and initial-boundary-value satisfy some conditions.