第11卷 第3期 数学研究与评论 Vol.11 No.3
1991年8月 JOURNAL OF MAAHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1991

二次系统存在抛物线奇异环的充要条件

沈伯骞
(辽宁师范大学数学系，大连)

迄今为止，对于二次系统存在除抛物线奇异环以外的所有各类二、三次曲线，甚至一些四次曲线分界线环或奇异环的充要条件已全部解决．本文将讨论二次系统存在抛物线奇异环的充要条件．并画出其所有可能的全局相图．

文［1］曾得出二次系统存在抛物线解$y=x^2$的充要条件是此系统可化为以下形式

$$\begin{cases}\dot{x}=ax+by+c+\beta(y-x^2)+hxy\\ \dot{y}=2x(ax+by+c)+a(y-x^2)+2hy^2\end{cases}\qquad(1)$$

现在先来讨论系统（1）的有限远奇点．

引理1 系统（1）在抛物线解$y=x^2$上不存在有限远奇点的充要条件是：$h=0$，$a^2-4ac<0$．

证明 抛物线$y=x^2$上的奇点坐标由以下联立方程给出．

$$\begin{cases}y=x^2\\ ax+by+c+\beta(y-x^2)+bxy=0\end{cases}$$

消去y得$hx^3+bx^2+ax+c=0$，显然当且仅当$h=0$，$a^2-4bc<0$时，系统（1）在抛物线$y=x^2$上不存在有限远奇点，证毕．

为讨论二次系统的抛物线奇异环，只需讨论以下系统

$$\begin{cases}\dot{x}=ax+y+c+\beta(y-x^2)=p(x\cdot y)\\ \dot{y}=2x(ax+y+c)+a(y-x^2)=Q(x,y)\end{cases}\qquad(2)$$

注意在这里设$b=1$，$a\geq0$，这并不失一般性．

引理2 系统(2)不位于抛物线$y=x^2$上的奇点至多只有一个，其坐标为$A\left(\frac{a}{2\beta},\frac{a^2-2aa-4c\beta}{4\beta(1+\beta)}\right)$．$A$位于$y=x^2$内侧的条件为$1+\beta<0$，$a^2-4c<0$．

证明 考虑联立方程

$$\begin{cases}ax+y+c+\beta(y-x^2)=0\\ 2x(ax+y+c)+a(y-x^2)=0\end{cases}$$

从第一个方程乘$2x$减去第二个方程得

$$(y-x^2)(2\beta x-a)=0.$$

所以唯一不位于$y=x^2$上的奇点A的x坐标满足方程

$$\begin{cases} 2\beta x - a = 0 \\ ax + y + c + \beta(y - x^2) = 0 \end{cases}$$

解之得$A\left(\frac{a}{2\beta}, \frac{a^2-2a\alpha-4c\beta}{4\beta(1+\beta)}\right)$．将$A$的坐标代入函数$F(x, y)=y-x^2$得

$$F\left(\frac{a}{2\beta}, \frac{a^2-2a\alpha-4c\beta}{4\beta(1+\beta)}\right) = -\frac{a^2+2a\beta\alpha+4c\beta^2}{4\beta^2(1+\beta)}$$

由条件$a^2-4c<0$及$1+\beta<0$知$F\left(\frac{a}{2\beta}, \frac{a^2-2a\alpha-4c\beta}{4\beta(1+\beta)}\right)>0$．即证明了$A$位于$y=x^2$内侧．□

引理3 设$a^2-4c<0$，$1+\beta<0$．则系统（2）位于抛物线解$y=x^2$内侧的奇点$A\left(\frac{a}{2\beta}, \frac{a^2-2a\alpha-4c\beta}{4\beta(1+\beta)}\right)$必为粗焦点或中心，具体地说，当$\alpha+a\beta>0$时，$A$是稳定粗焦点；当$\alpha+a\beta<0$时，$A$是不稳定粗焦点；当$\alpha+a\beta=0$时，$A$是中心．

证明 计算

$$\begin{pmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} a-\alpha, & 1+\beta \\ \frac{2a\alpha}{\beta}+\frac{a^2-2a\alpha-4c\beta}{2\beta(1+\beta)}+2c-\frac{a^2}{\beta}, & \frac{a}{\beta}+\alpha \end{pmatrix}$$

此矩阵行列式$q_A=-\frac{1}{2\beta}(a^2+2a\alpha\beta+4c\beta^2)>0$,又此矩阵主对角线上元素之和$p_A=\frac{1}{\beta}(\alpha+a\beta)$．

所以

$$p_A^2-4q_A=\frac{1}{\beta^2}(\alpha+a\beta)^2+\frac{2}{\beta}(a^2+2a\beta\alpha+4c\beta^2)$$

$$=\frac{1}{\beta^2}(\alpha+a\beta)^2(1+2\beta)+2\beta(4c-a^2)<0$$

所以A必为焦点或中心．

当$\alpha+a\beta>0$时，$p_A<0$，A为稳定粗焦点．

当$\alpha+a\beta<0$时，$p_A>0$，A为不稳定粗焦点．

当$\alpha+a\beta=0$时，系统（2）形为

$$\begin{cases} \dot{x} = c + ax + (1+\beta)y - \beta x^2 \\ \dot{y} = 2cx - a\beta y + a(2+\beta)x^2 + 2xy \end{cases}$$

取$B=F^\lambda=(y-x^2)^\lambda$．计算

$$\operatorname{div}(BP, BQ) = -F^\lambda(\beta\lambda+\beta-1)(2x+a)$$

令$\lambda=\frac{1-\beta}{\beta}$得$\operatorname{div}(BP, BQ)\equiv 0$，即知$A$为中心．□

引理4 系统（2）至多有两个无穷远奇点．即$P(0, 1, 0)$，$Q\left(0, 1, \frac{2+\beta}{\alpha-2a}\right)$．其中$P$是高次奇点．

当$\beta<-2$时，Q为结点，又如果$\alpha-2a<0$，则Q位于第一象限且为稳定结点；如果$\alpha-2a>0$，则Q位于第二象限且为不稳定结点，（这时位于第四象限的对顶点Q'仍为稳定

结点)；当$a-2a=0$时，Q位于x轴上为不稳定结点（其右侧对顶点Q'仍为稳定结点）.

当$-2<\beta<-1$时，Q为鞍点，又当$a-2a<0$时，Q位于第二象限；当$a-2a>0$时，Q位于第一象限；当$a-2a=0$时，Q位于x轴.

当$\beta=-2$且$a\neq 2a$时，Q重合于P成为高次奇点；而点$\beta=-2$，$a=2a$同时成立时，赤道上不存在奇点.

证明 对系统（2）作变换$x=\frac{v}{z}$，$y=\frac{1}{z}$得

$$\begin{cases}\dot{z}=\frac{1}{z}[-az^2-2zv-2cz^2v+(a-2a)zv^2] \\ \dot{v}=\frac{1}{z}[(1+\beta)z+cz^2+(a-a)zv-(2+\beta)v^2-2czv^2+(a-2a)v^3]\end{cases} \tag{3}$$

赤道$z=0$上无穷远奇点的v的坐标方程为

$$v^2[(a-2a)v-(2+\beta)]=0,$$

$P(0,1,0)$是高次奇点，另一奇点Q坐标为

$$Q\left(0,1,\frac{2+\beta}{a-2a}\right).$$

显然当$\beta=-2$时，Q重合于P；当$a=2a$时，Q位于x轴上；当$\beta=-2$，$a=2a$同时成立时，系统（3）可写成

$$\begin{cases}\dot{z}=-2az-2v-2czv \\ \dot{v}=-1+cz-av-2cv^2\end{cases}$$

这时赤道$z=0$上不存在奇点.

为讨论Q的性质，计算

$$\begin{pmatrix}P_z & P_v \\ Q_z & Q_v\end{pmatrix}_Q=\begin{pmatrix}\beta v & 0 \\ (1+\beta)+(a-a)v-\frac{2c(2+\beta)}{a-2a}v, & (2+\beta)v\end{pmatrix}_{v=\frac{2+\beta}{a-2a}}$$

从$q_a=\beta(2+\beta)v^2$，$p_Q=2(\beta+2)v$不难推断出本引理4中的所有的结论.

综合以上讨论，我们有以下定理

定理1 二次系统存在抛物线奇异环$y=x^2$（内含焦点）的充要条件是此系统可化为系统（2）的形式，且其系数满足条件

$$a^2-4c<0,\ \beta+1<0,\ a+a\beta\neq 0.$$

证明略.

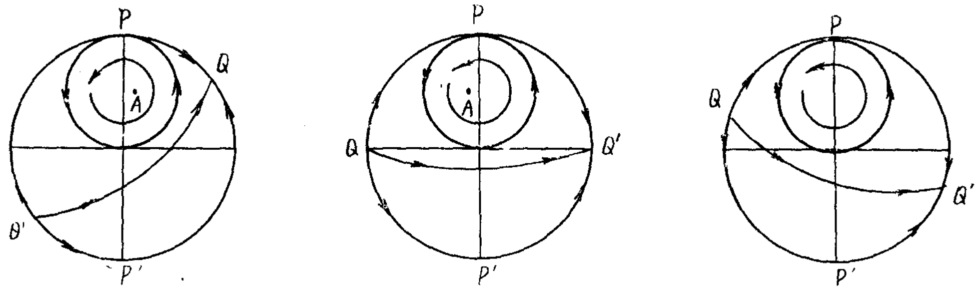
从文［2］已知系统（2）不存在极限环．再根据上面的讨论，我们可以画出系统（2存在抛物线奇异环$y=x^2$时的所有可能的全局相图如下：

情况一：$a^2-4ac<0$，$\beta<-2$，$a\geq 0$（见图1）

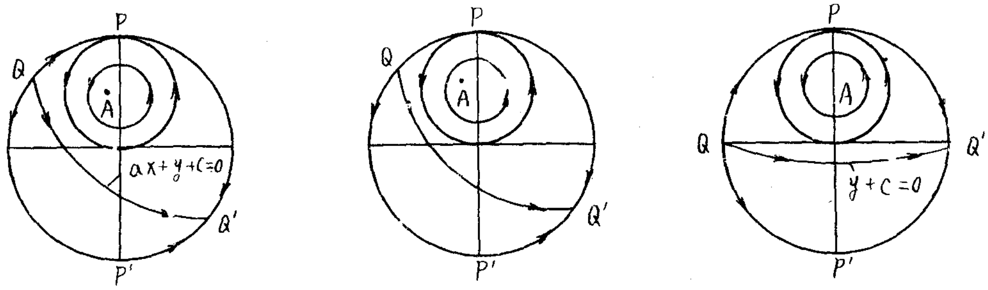
当$a=0$时，情况一中图（1)(5）形状不变，而图（2)(3)(4）相一致而成为图（(6）的形状.

情况二：$a^2-4c<0$，$\beta=-2$，$a\geq 0$（见图2）

当$a=0$时，情况二中图（1)(2)(3）均不变，只不过这时图（2）具有水平直线解

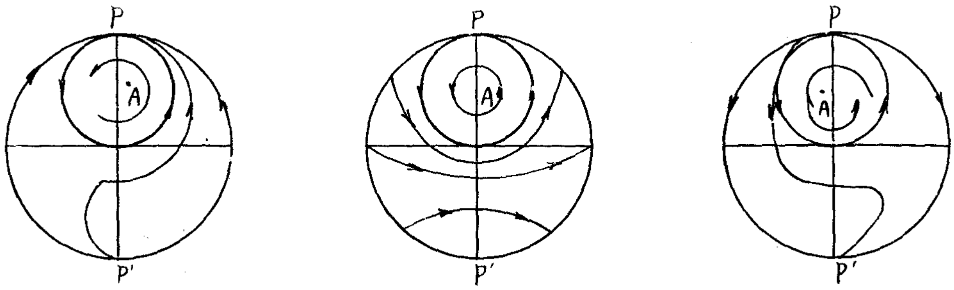


（1）$a<2\alpha$，$\alpha\geq 0$　　（2）$a=2\alpha$，$\alpha>0$　　（3）$2\alpha<a<\alpha\beta$，$\alpha>0$



（4）$a=-\alpha\beta$，$\alpha>0$　　（5）$a>-\alpha\beta$，$\alpha\geq 0$　　（6）$a=\alpha=0$

图　1



（1）$a<2\alpha$，$\alpha\geq 0$．　　（2）$a=2\alpha(=-\alpha\beta)$．$\alpha>0$　　（3）$a>2\alpha$，$\alpha\geq 0$

图　2

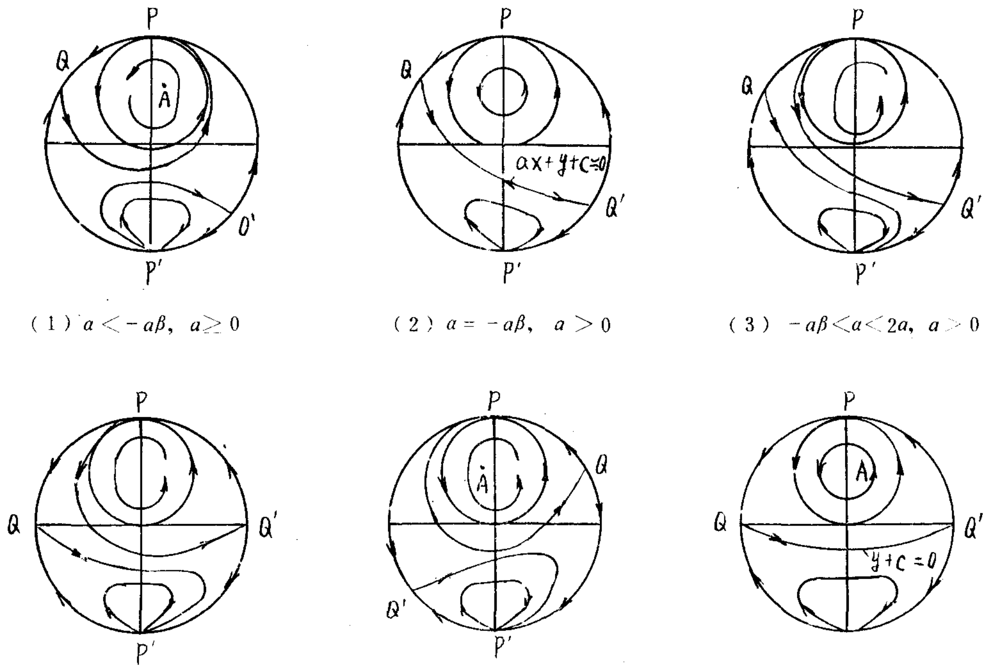
$y+c=0$，且A位于y轴上．

情况三：$a^2-4c<0$，$-2<\beta<-1$，$\alpha\geq 0$（见图3）

当$\alpha=0$时，情况三中图（1）（5）形状不变，而图（2）（3）（4）相一致而成为图（6）的形状．

注意，在情况三的诸图中，从左半赤道上的鞍点出发的分界线有三个可能的走向，它可以走向P；可以走向它的对顶点；也可以走向P'．我们可以证明情况三中，诸图的画法都是正确的．

先证明在情况三图（2）的条件$a=-\alpha\beta$，$\alpha\geq 0$下，直线$ax+y+c=0$是系统（2



（1）$\alpha < -a\beta$，$a \geq 0$　（2）$\alpha = -a\beta$，$a > 0$　（3）$-a\beta < \alpha < 2a$，$a > 0$

（4）$\alpha = 2a$，$a > 0$　（5）$\alpha > 2a$，$a \geq 0$　（6）$\alpha = a = 0$

图　3

的解．实际上，记$L(x, y) = ax + y + c$，则

$$\left.\frac{dL(x, y)}{dt}\right|_{L=0} = \{a[ax + y + c + \beta(y - x^2)] + [2x(ax + y + c) + \alpha(y - x^2)]\}_{L=0}$$

$$= (\alpha + a\beta)(y - x^2) \equiv 0$$

因此情况三图（2）以左半赤道上的鞍点出发的分界线必走向它的对顶点，所以是正确的．

再证明系统（2）在抛物线$y = x^2$外侧区域关于α构成旋转向量场，因

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ P_\alpha & Q_\alpha \end{vmatrix} = (\beta + 1)(y - x^2)\left[y - \frac{\beta}{\beta + 1}x^2 + \frac{a}{\beta + 1}x + \frac{c}{\beta + 1}\right]$$

可以证明抛物线$y = \dfrac{1}{\beta + 1}(\beta x^2 - ax - c)$必位于抛物线$y = x^2$的内侧，因在条件$\beta + 1 < 0$，$a^2 - 4c < 0$　下，

$$\frac{1}{\beta + 1}(\beta x^2 - ax - c) - x^2 = -\frac{1}{\beta + 1}(x^2 + ax + c) > 0,$$

所以在抛物线$y = x^2$外侧区域上，$\begin{vmatrix} P & Q \\ P_\alpha & Q_\lambda \end{vmatrix}$定负，故当$\alpha$增大时，$y = x^2$外侧区域的向量场按顺时针方向旋转，当$\alpha$减小时则反之．又因已知当$\alpha = -a\beta$时，从左半赤道上的鞍点出发的分界线走向它的对径点，因此当$\alpha < -a\beta$时它必走向P，当$\alpha > -a\beta$时它必走向P'．这就证明了情况三中的其它诸相图的画法也是正确的．

现在我们把系统（2）化为Ⅲ类系统，为此设

$$x=-(1+\beta)\sqrt{\frac{-2\beta}{4\beta^2c+2a\alpha\beta+a^2}}x'+\frac{a}{2\beta},$$

$$y=-\frac{a(1+\beta)}{\beta}\sqrt{\frac{-2\beta}{4\beta^2c+2a\alpha\beta+a^2}}x'+y'+\frac{a^2-2a\alpha-4c\beta}{4\beta(1+\beta)},$$

$$t=\sqrt{\frac{-2\beta}{4\beta^2c+2a\alpha\beta+a^2}}t'.$$

仍记x'，y'，t'为x，y，t得

$$\dot{x}=-y+\frac{\alpha+a\beta}{\beta}\sqrt{\frac{-2\beta}{4\beta^2c+2a\alpha\beta+a^2}}x-\frac{2\beta^2(1+\beta)}{4\beta^2c+2a\alpha\beta+a^2}x^2$$

$$\dot{y}=x\{1-\frac{4(1+\beta)^2(\alpha+a\beta)}{4\beta^2c+2a\alpha\beta+a^2}\sqrt{\frac{-2\beta}{4\beta^2c+2a\alpha\beta+a^2}}x+\frac{4\beta(1+\beta)}{4\beta^2c+2a\alpha\beta+a^2}y]$$

考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+\delta x+lx^2\\ \dot{y}=x(1+Ax+Ay)\end{cases}\tag{4}$$

其中

$$l=\frac{2\beta^2(1+\beta)}{4\beta^2c+2a\alpha\beta+a^2},$$

$$A=-\frac{4(1+\beta)^2(\alpha+a\beta)}{4\beta^2c+2a\alpha\beta+a^2}\sqrt{\frac{-2\beta}{4\beta^2c+2a\alpha\beta+a^2}}.$$

$$B=\frac{4\beta(1+\beta)}{4\beta^2c+2a\alpha\beta+a^2}.$$

从前面讨论易知当$a^2-4c<0$，$\beta+1<0$，$\alpha\geq 0$．$\alpha+a\beta\neq 0$，$|\delta|\leq\frac{\alpha+a\beta}{\beta}\sqrt{\frac{2\beta}{4\beta^2c+2\alpha+a}}$时，直线$1+Ax+By=0$上无奇点，且为系统（4）的无切直线．其两侧分别关于δ构成旋转向量场．有以下定理．

定理2 在系统（4）中，设$a^2-4c<0$，$\beta+1<0$，$\alpha\geq 0$．则

（1）当$\alpha+a\beta<0$时，极限环存在的充要条件是

$$0<\delta<\frac{\alpha+a\beta}{\beta}\sqrt{\frac{-2\beta}{4\beta^2c+4a\alpha\beta+a^2}}\ (=\delta_0)$$

（2）当$\alpha+a\beta>0$时，极限环存在的充要条件是

$$(\delta_0)=\frac{\alpha+a\beta}{\beta}\sqrt{\frac{-2\beta}{4\beta^2c+4a\alpha\beta+a^2}}<\delta<0.$$

证明 先证定理2的第（1）部分，从前面的讨论已知，系统（4）在条件$a^2-4c<0$，$\beta+1<0$，$\alpha\geq 0$，$\alpha+a\beta<0$之下，当$\delta=\delta_0(<0)$时具有抛物线奇异环，原点是此奇异环内的不稳定粗焦点．其全局相图与情况一中的图（1）（2）（3）；情况二中的图（1）或情况三中的图（1）有相同的定性结构．当δ以$\delta_0(>0)$减小时，在抛物线奇异环所在的半平面内的旋转向量场按逆时针方向旋转．所以

原来的抛物线奇异环变成了一区域的外境界线，其上向量场的方向向内，而其内部的原点当$a+a\beta<0$时，是不稳定粗焦点，因此在原点外周存在稳定极限环．此极限环随δ的减小而缩小，在δ减小到0之前，极限环始终存在．当δ减小到0时它缩至原点．从文［3］中的定理15.1不难知系统（4）当$\delta=0$时，已不存在极限环了．至此定理2的第（1）部分证毕．至于定理2的第（2）部分的证明类同．□

因此，彻底地解决了二次系统存在所有可能的二、三次曲线以及一些四次曲线分界线环或奇异环的充要条件．

参 考 文 献

［1］单国佐，索光俭，河北师范大学学报1985，1,11—16.
［2］Черкас Л.А. ДАН. БССР 7 NO_{11} (1963)
［3］叶彦谦等．极限环论，上海科学技术出版社 1984，346—347.

A Necessary and Sufficient Condition for the Existence of Parabolic Separatrix Cycles in a Quadratic System

Shen Boqian

(Liaoning Normal University, Dalian)

Abstract

In this paper. we obtained a necessary and sufficient condition for the existence of parabolic separatrix cycles in a quadratic system, and drawed its all possible phase-portraits. Further we obtain an accurate parameter interval that a Ⅲ type system exist ltmit cycles.