

对“某些具有变辐角的解析函数类” 一文中的错误的纠正*

杨定恭

(苏州大学数学系)

本文沿用文献 [1] 的定义, 记号及术语. Srivastava 和 Owa 在 [1] 中引进了单位圆盘 $U = \{z: |z| < 1\}$ 内解析函数类 B_a 和 C_a ($0 < a < 1$), 对这两类函数的分数次积分与分数次导数建立了三个定理, 即定理 8, 定理 9, 与定理 10 (见 [1, pp. 223-228]). 他们断言: 除估计式 (4.15) 和 (4.16) 不准确外, 所得结果皆准确, 其极值函数分别由 (4.12), (4.21) 与 (4.30) 确定.

我们指出: (i) 由 (4.12) 确定的函数应是 $f(z) = z + \frac{(2+\lambda)(1-a)}{2} e^{i\theta} z^2$ ($\lambda > 0$), 它不在 B_a 中, 因为不满足系数不等式 (2.1); 由 (4.21) 确定的函数应为 $f(z) = z + \frac{(2+\lambda)(1-a)}{4} e^{i\theta} z^2$ ($\lambda > 0$), 它不属于 C_a , 因为不满足条件 (2.6); 由 (4.30) 确定的 $f(z) = z + \frac{(2-\lambda)(1-a)}{2} e^{i\theta} z^2$ ($0 < \lambda < 1$) 也不在 C_a 中, 因为不满足 (2.6). 从而它们都不能成为极值函数. (ii) 关于定理 8, 定理 9, 与定理 10 的准确性的结论是错误的. 事实上, 采用 [1] 的方法只能得出粗略的估计.

在本文中, 我们以更精细的方法证得下面的准确结果.

定理 1 设函数 $f(z)$ 在类 B_a 中 ($0 < a < 1$), 则对 $\lambda > 0$ 和 $z \in U$ 有

$$|D_z^{-\lambda} f(z)| \geq \frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)} \left\{ 1 - \frac{2(1-a)}{2+\lambda} |z| \right\} \quad (1)$$

和

$$|D_z^{-\lambda} f(z)| \leq \frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)} \left\{ 1 + \frac{2(1-a)}{2+\lambda} |z| \right\}. \quad (2)$$

结果 (1) 和 (2) 是准确的, 且有极值函数 $f(z) = z + (1-a)e^{i\theta} z^2$.

注 在本定理中令 $\lambda \rightarrow 0$ 得 [1, 定理 3].

定理 2 设函数 $f(z)$ 在类 C_a 中 ($0 < a < 1$), 则对 $\lambda > 0$ 和 $z \in U$ 有

$$|D_z^{-\lambda} f(z)| \geq \frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)} \left\{ 1 - \frac{1-a}{2+\lambda} |z| \right\}, \quad (3)$$

* 1989年10月28日收到

$$|D_z^{-\lambda} f(z)| \leq \frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)} \left\{ 1 + \frac{1-a}{2+\lambda} |z| \right\}, \quad (4)$$

$$|D_z^{1-\lambda} f(z)| \geq \frac{|z|^\lambda}{\Gamma(2+\lambda)} \{ 1 + \lambda - (1-a) |z| \} \quad (5)$$

和

$$|D_z^{1-\lambda} f(z)| \leq \frac{|z|^\lambda}{\Gamma(2+\lambda)} \{ 1 + \lambda + (1-a) |z| \}. \quad (6)$$

结果 (3) — (6) 是准确的, 且有极值函数

$$f(z) = z + \frac{1-a}{2} e^{i\theta} z^2. \quad (7)$$

注 在本定理中令 $\lambda \rightarrow 0$ 得 [1, 定理 4].

定理 3 设函数 $f(z)$ 在类 C_a 中 ($0 < a < 1$), 则对 $0 < \lambda < 1$ 和 $z \in U$ 有

$$|D_z^\lambda f(z)| \geq \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} \left\{ 1 - \frac{1-a}{2-\lambda} |z| \right\} \quad (8)$$

和

$$|D_z^\lambda f(z)| \leq \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} \left\{ 1 + \frac{1-a}{2-\lambda} |z| \right\} \quad (9)$$

结果 (8) 和 (9) 是准确的, 极值函数由 (7) 给出.

参 考 文 献

- [1] H. M. Srivastava and S. Owa, J. Math. Anal. Appl. 136 (1988), 217-228.