第11卷 第4期
1991年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.4
Nov., 1991

一类利用函数偶的联合最佳逼近*

罗祖华 陈亚华
(荆州师专数学系，湖北)

§1 引 言

设 $X\subset[a,b]$，$K\subset C(X)$ 为 n 维线性子空间．又设 $F=\{f_1,\cdots,f_m\}\subset C(X)$．记

$$f^+(x)=\max_{1\le i\le m}\{f_i(x)\},\quad f^-(x)=\min_{1\le i\le m}\{f_i(x)\}$$

以及

$$K^+=\{p\in K:\ p\ge f^+\},\quad K^-=\{p\in K:\ p\le f^-\}$$

$$G=\{(p_1,p_2):\ p_1\in K^+,\ p_2\in K^-\}$$

在 $C(X)$ 中引进一种范数 $\|\cdot\|$．对如下的极小问题：寻找 $(p_1,p_2)\in G$，使它满足条件

$$\|p_1-p_2\|=e\equiv\inf\{\|q_1-q_2\|:\ (q_1,q_2)\in G\}$$

则称这样的函数偶 (p_1,p_2) 为 F 在 K 中的最佳逼近偶．显然，这是[1]中概念的扩展．本文对这一扩展了的问题建立了和[1]中完全类似的结果．

为完备起见，我们考虑 f^+ 和 f^- 更一般化的情况：f^+ 是上半连续的，f^- 是下半连续的．即 $\{x:\ f^+(x)\ge r\}$ 和 $\{x:\ f^-(x)\le r\}$ 对任意的实数 r 是闭集．

注意到 $K^+=\{p\in K:p\ge f^+\}$ 和 $K^-=\{p\in K:\ p\le f^-\}$ 是有限维空间 K 中的闭子集，故 G 是 $K\times K$ 中的闭子集，因而由[3]，可得下述的存在定理

定理1 $F\subset C(X)$ 在 K 中的最佳逼近偶总是存在的．

§2 L_1 逼近

我们对 L_1 范数讨论最佳逼近偶的特征和其唯一性，得到了和[1]类似的如下结论，此处设 $X=[a,b]$．我们有

定理2 $(p_1,p_2)\in G$ 是 F 在 K 中的最佳 L_1 逼近偶的必要条件是：p_1 和 p_2 分别是 F 在 K^+ 中和在 K^- 中的联合最佳 L_1 逼近．

证明 假设相反，不妨设 p_1 不是 F 在 K^+ 中的联合最佳 L_1 逼近，即 $\exists q_1\in K^+$，使

$$\sup_{f\in F}\|q_1-f\|<\sup_{f\in F}\|p_1-f\| \tag{1}$$

由 $f^+(x)=\max_{1\le i\le m}\{f_i(x)\}$，$f^-(x)=\min_{1\le i\le m}\{f_i(x)\}$ 及 $q_1,p_1\in K^+$，故(1)式即为

$$\|q_1-f^-\|<\|p_1-f^-\| \tag{2}$$

如此，则 $(q_1,p_2)\in G$，且

* 1989年12月11日收到．

$$\|q_1-p_2\|=\|q_1-f^-\|+\|f^--p_2\|<\|p_1-f^-\|+\|f^--p_2\|=\|p_1-p_2\|. \tag{3}$$

此与(p_1, p_2)是F的最佳逼近偶相矛盾．故p_1和p_2应分别是F在K^+中和在K^-中的联合最佳L_1逼近． ∎

由定理 2 的证明过程可得

定理 3 $(p_1, p_2)\in G$是F在K中的最佳L_1逼近偶的必要条件是：p_1和p_2分别是f^-在K^+中和f^+在K^-中的最佳L_1逼近．

由〔4,定理2〕，以及$(p_1, p_2)\in G$，$p_1\in K^+$，$p_2\in K^-$和K^+, K^-的定义，可得如下结论

定理 4 若p_1和p_2分别是F在K^+中和F在K^-中的联合最佳L_1逼近，则p_1和p_2都是唯一的．

由定理 2 和定理 4 可得

定理 5 若$(p_1, p_2)\in G$是F在K的最佳L_1逼近偶，则它是唯一的．

由存在性(定理 1)、必要性(定理 2)和唯一性(定理 5)，可得

定理 6 $(p_1, p_2)\in G$是F对K中的最佳L_1逼近偶当且仅当p_1和p_2分别是F在K^+中和F在K^-中的联合最佳L_1逼近．并且，$(p_1, p_2)\in G$是唯一的最佳逼近偶．

由定理 2 的证明过程知，

定理 7 $(p_1, p_2)\in G$是F在K中的最佳L_1逼近偶当且仅当p_1和p_2分别是f^-在K^+中和f^+在K^-中的最佳L_1逼近．

因而有下述推论[5]

推论 $(p_1, p_2)\in G$是F在K中的最佳L_1逼近偶当且仅当同时满足如下两个关系式

$$\int_X (q-p_1)\operatorname{sgn}(f^--p_1)\,dx\le\int_{Z(f^--p_1)}|q-p_1|\,dx, \quad \forall q\in K^+$$

$$\int_X (q-p_2)\operatorname{sgn}(f^+-p_2)\,dx\le\int_{Z(f^+-p_2)}|q-p_2|\,dx, \quad \forall q\in K^-$$

§3 L_∞ 逼 近

设闭集$X\subset[a, b]$．记

$$D(p_1-p_2)=\{x\in X:|p_1(x)-p_2(x)|=\|p_1-p_2\|\}.$$

定义 $\Gamma(p_1, p_2)\subset K\times K$是所有满足下述条件的函数偶的集合：对于每一个$(r_1, r_2)\in\Gamma(p_1, p_2)$，都存在一个$\lambda^*>0$，使得

$$(p_1, p_2)+\lambda(r_1, r_2)=(p_1+\lambda r_1, p_2+\lambda r_2)\in G, \quad \forall\lambda\in(0, \lambda^*) \tag{4}$$

对集合$\Gamma(p_1, p_2)$我们有下述特征

定理 1 设$(p_1, p_2)\in G$及$(r_1, r_2)\in K\times K$，则$(r_1, r_2)\in\Gamma(p_1, p_2)$当且仅当对每一点$\xi\in Z(p_1-f^+)$，$(\xi\in Z(p_2-f^-))$都存在一个邻域$\delta_\xi$及$\lambda_\xi>0$，使

$$p_1(x)+\lambda r_1(x)\ge f^+(x),\ (p_2(x)+\lambda r_2(x)\le f^-(x)), \quad \forall\lambda\in(0, \lambda_\xi), \quad \forall x\in\delta_\xi \tag{5}$$

证明 由$\Gamma(p_1, p_2)$之定义可直接得到必要性

现证充分性 设$\xi\notin Z(p_1-f^+)$，$(\xi\notin Z(p_2-f^-))$，则$p_1(\xi)>f^+(\xi)$，$(p_2(\xi)<f^-(\xi))$．据$p_1(p_2)$之连续性及$f^+(f^-)$的上(下)半连续性，可以找到ξ的邻域δ_ξ及$\lambda_\xi>0$，使(5)式成立．这样，$\bigcup_{\xi\in X}\delta_\xi\supset X$，而$X$为$[a, b]$中的闭集，故可选有限多个邻域覆盖$X$，取其中之最小者为$\lambda_1(\lambda_2)>0$，则

$$p_1+\lambda r_1\geq f^+,\quad \forall\lambda\in(0,\lambda_1),\ (p_2+\lambda r_2\leq f^-,\ \forall\lambda\in(0,\lambda_2))$$

令 $\lambda=\min(\lambda_1,\lambda_2)$，则（4）式成立，即 $(r_1,r_2)\in\Gamma(p_1,p_2)$． ∎

由此可得最佳 L_∞ 逼近偶的一个特征

定理 2 $(p_1,p_2)\in G$ 是 F 在 K 中的最佳一致逼近偶的充要条件是：不存在函数偶 $(r_1\,r_2)\in\Gamma(p_1,p_2)$ 使

$$r_1(x)<r_2(x),\quad \forall x\in D(p_1-p_2) \tag{6}$$

证明 必要性 假定 $\exists(r_1,r_2)\in\Gamma(p_1,p_2)$ 满足（6）式，则此时应有 $\|p_1-p_2\|>0$，否则从 $e=0$ 将有 $p_1=p_2=f^+=f^-$，$Z(p_1-f^+)=Z(p_2-f^-)=D(p_1-p_2)=X$，因而有

$$p_1+\lambda r_1\geq f^+\geq f^-\geq p_2+\lambda r_2,\qquad \forall\lambda\in(0,\lambda^*)$$

以及 $r_1<r_2$，$\forall x\in X$．这是不可能的，故 $e>0$．

再证：$\exists\bar{\lambda}>0$，使当 $0<\lambda<\bar{\lambda}$ 时，

$$\|p_1-p_2+\lambda(r_1-r_2)\|<e \tag{7}$$

对 $\xi\in D(p_1-p_2)$，由 $r_1(\xi)<r_2(\xi)$ 及 $p_1(\xi)-p_2(\xi)=|p_1(\xi)-p_2(\xi)|=e>0$ 知，$\exists\xi$ 之邻域 δ_ξ 及 $\lambda_\xi>0$，使

$$-e<p_1(x)-p_2(x)+\lambda(r_1(x)-r_2(x))<e,\quad \forall\lambda\in(0,\lambda_\xi),\quad \forall x\in\delta_\xi \tag{8}$$

而对 $\xi\notin D(p_1-p_2)$，据连续性，由 $p_1(\xi)>p_2(\xi)$ 及 $p_1(\xi)-p_2(\xi)<e$，可知也存在 ξ 之邻域 δ_ξ 及正数 λ_ξ，使（8）式成立．

由此，同定理 1 之证明可得：$\exists\bar{\lambda}>0$，使当 $0<\lambda<\bar{\lambda}$ 时，$\|p_1-p_2+\lambda(r_1-r_2)\|<e$．

取 $0<\lambda<\min(\bar{\lambda},\lambda^*)$；令 $q_1=p_1+\lambda r_1$，$q_2=p_2+\lambda r_2$．则 $(q_1,q_2)\in G$，且 $\|q_1-q_2\|<e$，与 (p_1,p_2) 是最佳逼近偶相矛盾．故假设不成立．即必要性得证．

充分性 设 (p_1,p_2) 非 F 之最佳逼近偶，则有 $(q_1,q_2)\in G$，使得 $\|q_1-q_2\|<\|p_1-p_2\|$．

记 $r_1=q_1-p_1$，$r_2=q_2-p_2$，当 $0\leq\lambda\leq1$ 时易见

$$p_1+\lambda r_1=p_1+\lambda(q_1-p_1)=(1-\lambda)p_1+\lambda q_1\geq f^+,$$

$$p_2+\lambda r_2=p_2+\lambda(q_2-p_2)=(1-\lambda)p_2+\lambda q_2\leq f^-.$$

这表明 $(r_1,r_2)\in\Gamma(p_1,p_2)$，且当 $x\in D(p_1-p_2)$ 时，恒有

$$q_1(x)-q_2(x)\leq\|q_1-q_2\|<\|p_1-p_2\|=p_1(x)-p_2(x)$$

即 $r_1(x)<r_2(x)$，$\forall x\in D(p_1-p_2)$．矛盾．故 (p_1,p_2) 是 F 之最佳一致逼近偶． ∎

为推出另一特征定理，须证明

引理 1 设 $1\in K$，若 $p\in K$ 是 F 在 K 中的联合最佳一致逼近，且 $E=\|F-p\|=\max\{\|f^+-p\|,\|f^--p\|\}$，则

（a） $p+E$ 是 F 在 K^+ 中的联合最佳一致逼近．

（b） $p-E$ 是 F 在 K^- 中的联合最佳一致逼近．

此外，若以 $E_1(E_2)$ 表示 F 在 K^+ 中（K^-）中的联合最佳逼近偏差，则

$$e=E_1=E_2=2E$$

证明 （a）因为 $q=p+E\in K^+$，又 $f^+=\max\limits_{1\leq i\leq m}\{f_i\}$，$f^-=\min\limits_{1\leq i\leq m}\{f_i\}$．

由 $E=\|F-p\|=\max\{\|f^+-p\|,\|f^--p\|\}$．可知至少存在一个 $\xi\in X$，使得

$$f^-(\xi)-p(\xi)=-E \tag{9}$$

故 $$\|q-f^-\|=\|p-E-f^-\|=\|E+p-f^-\|=2E$$

又 $$\|q-f^+\| = \|p+E-f^+\| \leq \|p+E-f^-\| = 2E.$$

故 $$\|q-F\| = 2E$$

另一方面，若 $q_1 \in K^+$，且 $\|q_1-F\| = 2d < 2E$，则 $\|q_1-f^-\| \leq 2d < 2E$，$\|q_1-f^+\| \leq 2d < 2E$，因而有

$$\|(q_1-d)-f^-\| = \|(q_1-f^-)-d\| \leq d < E$$

和 $$\|(q_1-d)-f^+\| = \|(q_1-f^+)-d\| \leq d < E.$$

即 $\|(q_1-d)-F\| < E = \|p-F\|$，$(q_1-d)$是比 p 更好的逼近与引理的条件矛盾；故 $p+E$ 是F在K^+中的联合最佳一致逼近，且 $E_1 = \|p+E-F\| = 2E$.

（b）同理可证，$p-E$是F在K^-中的联合最佳逼近，且 $E_2 = 2E$.

最 ，由 e 之定义有，$e \leq \|p+E-(p-E)\| = 2E$ 及 $e \geq E_1 = 2E$，

故 $$e = E_1 = E_2 = 2E.$$ ∎

由引理1的证 过程可得

引理 1′ 设 $1 \in K$，若 $p \in K$是F在K中的联合最佳一致逼近及 $E = \|p-F\|$，则

（a）$p+E$是f^-在K^+中的最佳一致逼近，

（b）$p-E$是f^+在K^-中的最佳一致逼近.

若以$E_1(E_2)$表示$f^-(f^+)$在$K^+(K^-)$中的最佳一致逼近偏差，则 $e = E_1 = E_2 = 2E$.

定理 3 设 $K \subset C[a, b]$ 是 n 维 Haar子空间且$1 \in K$，则$(p_1, p_2) \in G$是F在K中的最佳一致逼近偶当且仅当 p_1和p_2分别是F在K^+中和在K^-中的联合最佳一致逼近，而且F之最佳一致逼近偶是唯一的.

证明 **必要性** 在引理1的记号下，有

$$\|p_1-p_2\| = e = E_1 = E_2 = 2E$$

所以 $$\|p_1-F\| = \max\{\|p_1-f^+\|, \|p_1-f^-\|\} \leq \|p_1-p_2\| = E_1,$$

$$\|p_2-F\| = \max\{\|f^+-p_2\|, \|f^--p_2\|\} = \|f^+-p_2\| \leq \|p_1-p_2\| = E_2.$$

故 p_1和p_2分别是F在K^+中及F在K^-中的联合最佳一致逼近.

又F在K^+及F在K^-中的联合最佳一致逼近是单侧逼近，因而由F之定义，p_1和p_2都分别是唯一的.

由§1之存在性定理1和引理1及上述必要 ，可知有充分性成立. ∎

由引理1′及定理3的证明过程，可得

定理 3′ 设 $K \subset C[a, b]$是n维 Haar子空间且$1 \in K$. 则$(p_1, p_2) \in G$是F在K中的最佳一致逼近偶当且仅当 p_1和p_2分别是 f^-在K^+中和 f^+在K^-中的最佳一致逼近. 而且，F之最佳一致逼近偶是唯一的.

参 考 文 献

[1] 史应光，一类利用函数偶的最佳逼近，数学年刊，1982年3卷5期

[2] C. B. Dunham Simultaneous Chebyshev Approximation of Functions on an Interval, Proc. Amer. Math. Soc. 18, No.3, 1967.

[3] E. W. Cheney, Introduction to Approximation Theory, Mcg raw-Hill, Now York, 1966.

[4] M. P. Carroll, Approximation of a Compact Set of Real-Valued Functions, Numer. Math. 19, 110—115 (1972).

[5] 史应光，计算数学，2:3(1980), 197—202.

Best Simultaneous Approximation by Function Pairs

Luo Zhuhua *Chen Yehua*

(Dept. Math. Jingzhou Normal College)

Abstract

In this note, the author discusses the problem of best simultaneous approximation by function pairs. The existence and characterization theorems of the best simultaneous approximation in L_1 and L_∞ norms are obtained respectively, and some rezults of [1] are the special case of the theorems of the paper.