第11卷 第4期 数学研究与评论 Vol.11 No.4
1991年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 1991

关于奇异积分的一点评注*

孙利民

（杭州大学数学系，杭州）

设 $H(x)=b(|x|)\Omega(x)/|x|^n$，我们总假定

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(x)\mathrm{d}\sigma(x)=0,\ \Omega(\lambda x)=\Omega(x),\ x\in R^n,\ \lambda>0.$$

而 b 是 R^1 上的可测函数．定义奇异积分算子

（1） $$Tf(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}H(y)f(x-y)\mathrm{d}y. \quad (1)$$

J. Namazi在文[1]中证明：如果对某个 $1<q\leq\infty$ 有 $\Omega\in L^q(S^{n-1})$，且 $b\in L^\infty(0,+\infty)$，则由（1）定义的算子 T 是 $L^p(R^n)$ 上有界算子，$1<p<\infty$，$n\geq 2$.

本文证明上述结论中关于 b 的有界性条件可以放宽．对于上述 $1<q\leq\infty$，设 $1<q_0<2/(1+\frac{1}{q})$ 及 $\frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}=1$．我们对 b 施加下述三个条件：

（A_1） 存在常数 $\eta_0\in(0,\frac{1}{p_0})$ 及常数 $C(\eta_0)$ 使得

$$\sup_{s>0}\frac{1}{s^{1-a}}\int_0^s\frac{|b(t)|}{t^a}\mathrm{d}t\leq C(\eta_0),\qquad 0<|a|\leq\eta_0;$$

（A_2） 存在常数 $\eta_0'\in(0,\frac{1}{p_0})$ 及常数 $C(\eta_0')$ 使得

$$\sup_{s>0}s^{a+1/p_0}\left(\int_s^\infty\left|\frac{b(t)}{t^{1+a}}\right|^{q_0}\mathrm{d}t\right)^{1/q_0}\leq C(\eta_0'),\quad 0<|a|\leq\eta_0';$$

（A_3） $$\left(\int_1^\infty\left|\frac{b(t)}{t^{1+a}}\right|^{p_0}\mathrm{d}t\right)^{1/p_0}\leq C(a),\quad 0\leq|a|<1-\frac{1}{p_0}\ .$$

定理1 设 $\Omega\in L^q(s^{n-1})$，$q\in(1,+\infty]$．且对某个 $1<q_0<2/(1+\frac{1}{q})$ 及 $\frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}=1$，$b$ 满足（A_1）、（A_2）和（A_3）．则由（1）定义的算子 T 是 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 上有界算子，$1<p<\infty$，$n\geq 2$

容易验证，若 $b\in L^\infty(0,+\infty)$，则 b 必满足（A_1）、（A_2）和（A_3），而且我们有

定理2 设 $b(t)\in L^\infty(0,1]$，p_0，q_0 如定理1所述，且 $b(t)\in L^{2p_0}\cap L^{2q_0}(1,+\infty)$．则 $b(t)$ 必满足（A_1）、（A_2）和（A_3）．

例 令

$$b(t)=\begin{cases}1, & t\in(0,1]\\ n, & t\in[n,n+\frac{1}{n^3}],\quad n=1,2,\cdots\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则 $b(t)\notin L^\infty(0,+\infty)$．但 $b(t)$ 满足定理2中条件，从而 $b(t)$ 满足（A_1）、（A_2）、（A_3）．由此可见定理1确实改进了文[1]中的结果．

参考文献

[1] J. Namazi, Proc. Amer. Soc., 96(1986), 421—424.

* 1989年12月4日收到．