第11卷 第4期
1991年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.4
Nov., 1991

极限集内周期运动的存在性*

洪佳林 王荣华

（黑龙江克山师范专科学校，克山）

摘 要

本文研究了一般度量空间中动力系统的极限集内周期运动的存在性.

文中我们设 (X, d) 是一个度量空间，$\pi: XR \to X$ 是 X 上的一个动力系统，文中用到的概念请见文献[2]，[4]，[5].

定理1 设 (X, d) 是完备的，如果存在一个下半连续函数 $\varphi: X \to [0, +\infty)$，以及实数 $w>0$，使得对于任何的 $p \in X$，都有

$$d(p, \pi(p, w)) \leq \varphi(p) - \varphi(\pi(p, w)), \tag{1}$$

则必有 $\bar{p} \in X$，使得 $\pi(\bar{p}, t)$ 是 w-周期运动.

证明 由条件及Caristi定理[1]知映射 $\pi(\cdot, w): X \to X$ 存在不动点 $\bar{p} \in X$，即 $\pi(\bar{p}, w) = \bar{p}$，再从动力系统的性质[2]，知 $\pi(\bar{p}, t)$ 是 w-周期运动. ■

引理 对于实数 w，存在 $\varphi: X \to [0, +\infty)$ 使(1)成立的充分必要条件是级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} d[\pi(p, nw), \pi(p, (n+1)w)]$ 对于所有 $p \in X$ 都收敛.

证明 由[3]中的主要结果及动力系统的性质得此引理.

为了建立主要结果，首先给出如下概念：

定义 对于 $p \in X$，记 $O_w(p, +\infty) = \{\pi(p, nw) \mid w>0, n\text{是自然数}\}$. 称 $G: X \to [0, +\infty)$ 在 $\bar{p}$ 处 π-轨道下半连续，如果 $\{p_n\} \subset O_w(p, +\infty)$ 且 $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \bar{p}$，则 $G(\bar{p}) \leq \liminf\limits_{n \to +\infty} G(p_n)$.

定理2 设实数 $w>0$，函数 $\varphi: X \to [0, +\infty)$，如果存在 $p \in X$ 使得 $d(p', \pi(p', w)) \leq \varphi(p')$ $\varphi(\pi(p', w))$ 对于任何 $p' \in O_w(p, +\infty)$ 都成立，并且 $O_w(p, +\infty)$ 中任何Cauchy序列在 X 中都收敛，则

(1) Ω_p 不空，$\lim\limits_{n \to +\infty} \pi(p, nw) = \bar{p}$ 存在. 如果运动系列 $\{\pi(p_n, t)\}$ $(\{p_n\} \subset O_w(0, +\infty))$ 在 $0 < t < +\infty$ 上一致收敛，则 Ω_p 是假极小集；

(2) $d(\bar{p}, \pi(p, nw)) \leq \varphi[\pi(p, nw)]$；

(3) $\pi(\bar{p}, t)$ 是 w-周期运动的充要条件是：$G(p) = d(p, \pi(p, w))$，在 $\bar{p}$ 处 π-轨道下半连续；

* 1989年3月3日收到.

（4） $d(\pi(p, nw), p) \le \varphi(p)$，进而 $d(p, \bar{p}) \le \varphi(p)$.

证明 对于自然数 m、n，不妨设 $m>n$，由引理知

$$d[\pi(p, nw), \pi(p, mw)] \le \sum_{k=n}^{m-1} d[\pi(p, kw), \pi(p, (k+1)w)]$$

的右端是收敛的．知 $\{\pi(p, nw)\}$ 是一个Cauchy序列，据条件存在 $\bar{p} \in x$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi(p, nw) = \bar{p} \in \Omega_p$，即 Ω_p 不空．

又由 $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi(p, t+nw) = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi(\pi(p, nw), t) = \pi(\bar{p}, t)$，在 $0<t<+\infty$ 上一致成立及黄文灶定理（[4]中定理3的推论），证得 Ω_p 是假极小集合，至此证得（1）；

（2） $0 \le d[\pi(p, nw), \pi(p, mw)] \le \sum\limits_{k=n}^{m-1} [\varphi(\pi(p, kw)) - \varphi(\pi(p, (k+1)w))]$

$\le \varphi[\pi(p, nw)]$，令 $m \to +\infty$ 得到（2）；

（3） 充分性 取 $p_n = \pi(p, nw)$，由

$$0 \le d(\bar{p}, \pi(\bar{p}, w)) \le G(p) \le \liminf_{n\to-\infty} G(p_n)$$

$$= \liminf_{n\to+\infty} d[\pi(p, nw), \pi(p, (n+1)w)] = 0$$

知 $\pi(\bar{p}, w) = \bar{p}$，即 $\pi(\bar{p}, t)$ 是 w-周期运动；

必要性 设 $\pi(\bar{p}, t)$ 是 w-周期运动，则有 $\pi(\bar{p}, t) = \pi(\bar{p}, t+w)$ 或 $\pi(\bar{p}, w) = \bar{p}$，我们取 $\{p_n\}$ 是 $O_w(p, +\infty)$ 中的一个序列，满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \bar{p}$，则 $G(\bar{p}) = d(\bar{p}, \pi(\bar{p}, w)) = 0 \le \liminf\limits_{n\to+\infty} G(p_n)$．因而 $G(p) = d(p, \pi(p, w))$ 是 π-轨道下半连续的．

（4） $d(p, \pi(p, nw)) \le d(p, \pi(p, w)) + d[\pi(p, w), \pi(p, 2w)] + \cdots$

$+ d[\pi(p, (n-1)w), \pi(p, nw)] \le \varphi(p) - \varphi[\pi(p, nw)] \le \varphi(p)$

令 $n \to +\infty$ 得到 $d(p, \bar{p}) \le \varphi(p)$. ■

推论 设 (x, d) 是完备的，$0<k<1$，实数 $w>0$，如果存在 p 使得 $d[\pi(p', w), \pi(p', 2w)] \le k\, d(p', \pi(p', w))$ 对于所有 $p' \in O_w(0, +\infty)$ 成立，则

（1） $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi(p, nw) = \bar{p}$ 存在，即 Ω_p 不空；

（2） $d[\pi(p, nw), \bar{p}] \le k^n (1-k)^{-1} d(p, \pi(p, w))$，

（3） $\pi(\bar{p}, t)$ 是 w-周期运动当且仅当 $G(p) = d(p, \pi(p, w))$，在 $\bar{p}$ 处 π-轨道下半连续；

（4） $d(p, \pi(p, nw)) \le (1-k)^{-1} d(p, \pi(p, w))$．

证明 对于 $p' \in O_w(p, +\infty)$，取 $\varphi(p') = (1-k)^{-1} d(p', \pi(p', w))$，则由条件得 $d(p', \pi(p', w)) \le \varphi(p') - \varphi(\pi(p', w))$．因而从定理2得到（1）、（3）、（4）．对于（2），从条件知

$$d(\pi(p, nw), \pi(p, (n+1)w)) \le k^n d(p, \pi(p, w))$$

于是

$$\begin{aligned} d[\pi(p, nw), \bar{p}] &\le \varphi[\pi(p, nw)] \\ &= (1-k)^{-1} d[\pi(p, nw), \pi(p, (n+1)w)] \\ &\le k^n (1-k)^{-1} d(p, \pi(p, w)). \end{aligned}$$ ■

注记 对于极限集合 A_p 中的周期运动的存在性，只须考虑实数 $w<0$ 的情况．

参 考 文 献

[1] J. Coristi, Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976), 241—251.

[2] V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov, "Qualitative Theory of Differentiol Equations" Princeton Univ. Press. Princeton. NJ. 1960.

[3] J. Eisenfeld and V. Lakshmikantham, Appl. Math. Comput. 3 (1977), 155—167.

[4] 张芷芬、丁同仁、黄文灶，科学通报，第25卷，第16期(1980)，721—724.

[5] W. M. Ruess and W. H. Summers, J. Differential Equations 71, 261—269 (1988).

Existence of Periodic Motion in Limite Sets

Hong Jialin　　*Wang Ronghua*

(Keshan Teacher's College)

Abstract

In this paper we study the existence of the periodic motion in limite sets of dynamical system in general metric space.