第11卷 第4期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.11 No.4
1991年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　NoV. 1991

实赋范数性空间内的L^p-正交*

李　新　宝

（南开大学，天津）

F. Sullivan[1]提出了L^p-正交的概念，刘证[2]研究了Banach空间中L^p-正交的性质与一致凸空间的关系．本文证明了：设$p>1$，E是实赋范线性空间，若其内定义的L^p-正交满足：i）齐性；ii）可加性；iii）$x\perp_{L^p}y$推出$x\perp_J y$，$x, y\in E$；iv）$x\perp_J y$推出$x\perp_{L^p}y$，$x, y\in E$，中任何一项，则E是一个抽象欧氏空间，而且有$p=2$．另外，本文还为 R. C. James 的一个未经证实的结论补充了证明．

文中，E专指维数≥ 2的实赋范线性空间．

定义 1　如果对于有序元对$x, y\in E$，可定义$E\times E$到实数域$\boldsymbol{R}$内的函数(x, y)，使其具有如下四条性质：

i)　$(tx, y)=t(x, y)$，$x, y\in E$，$t\in \boldsymbol{R}$；

ii)　$(x, y)=(y, x)$　$x, y\in E$；

iii)　$(x, y+z)=(x, y)+(x, z)$，$x, y, z\in E$；

iv)　$\|x\|^2=(x, x)$，$x\in E$，

我们称E为抽象欧氏空间．

定义 2　设$x, y\in E$，我们称x与y是James正交的（记作$x\perp_J y$）是指下面不等式成立

$$\|x\|\leq\|x+ky\|,\quad \forall k\in \boldsymbol{R}.$$

定义 3　设$x, y\in E$，称x与y是Roberts正交的（记作$x\perp_R y$）是指下式成立

$$\|x+ky\|=\|x-ky\|,\quad \forall k\in \boldsymbol{R}.$$

定义 4　设$p>1$为固定实数，$x, y\in E$，称x与y是L^p-正交的（$x\perp_{L^p}y$）是指下式成立

$$\|x+y\|^p=\|x\|^p+\|y\|^p.$$

注　对于上述三种正交，称其满足齐性指若$x\perp y$，则$\alpha x\perp \beta y, \forall \alpha, \beta\in \boldsymbol{R}$；称为满足左可加指．若$x\perp z$，$y\perp z$，则$x+y\perp z$；右可加指$x\perp y$，$x\perp z$，则$x\perp y+z$；满足可加性指同时满足左右可加性；满足对称性指 若$x\perp y$，则$y\perp x$．

引理 1[2]　设$p>1$，则对于任意$\theta\neq x$，$y\in E$，都存在$a\in \boldsymbol{R}$，使得$x\perp_{L^p}ax+y$．

引理 2[2]　设$p>1$，$x, y\in E$，以下两条是等价的：

i）若$x\perp_{L^p}y$ 则$x\perp_J y$；

ii）若$x\perp_J y$ 则$x\perp_{L^p}y$．

注　在[2]中，上述两引理中E是实Banach空间，但从其证明过程可看出，当E是实

* 1988年5月3日收到．

赋范线性空间时，结论仍成立.

引理 3[4] 对于任意 $x, y\in E$，存在着 $a\in \boldsymbol{R}$，使得 $x\perp_J ax+y$.

定理 1 设 $p>1$，若 E 内的 L^p-正交满足齐性，则由 $x\perp_{L^p}y$ 可推出 $x\perp_J y$.

证明 略.

定理 2 设 $p>1$，若 E 内的 L^p-正交是可加的，则可由 $x\perp_{L^p}y$ 推出 $x\perp_J y$.

证明 不妨设 $\theta\neq x, y\in E$，$x\perp_{L^p}y$，利用引理 1 及 L^p-正交之对称性知对任意的非零整数 m, n 都有

$$\|x+\frac{n}{m}y\|=\|x-\frac{n}{m}y\|$$

因此
$$\|x\|=\frac{1}{2}\|(x+\frac{n}{m}y)+(x-\frac{n}{m}y)\|\leq\|x+\frac{n}{m}y\|$$

而 $\|x+ty\|$ 是 t 的连续函数，故 $x\perp_J y$. ■

利用引理 2 及 James 正交之齐性不难证明：

定理 3 设 $p>1$，若 $x\perp_{L^p}y$ 蕴含 $x\perp_J y$ 或者 $x\perp_J y$ 蕴含 $x\perp_{L^p}y$，则 James 正交与 Roberts 正交是等价的.

定理 4[3] 若任意 $x, y\in E$，存在 $a\in\boldsymbol{R}$，使得 $x\perp_R ax+y$，则 E 是一个抽象欧氏空间.

由于在文献[3]中，定理 4 是未经证明的，下面补充其证明．为此先证明

引理 4 若任意 $x, y\in E$，存在 $a\in\boldsymbol{R}$，使得 $x\perp_R ax+y$，则 E 是严格凸的.

证明 用反证法，假如结论不真，则存在着 $x, y\in E$，$x\neq y$，$\|x\|=\|y\|=1$，而且 $\|\lambda x+(1-\lambda)y\|=1$，$\forall\lambda\in[0,1]$. 由条件知存在 $a\in\boldsymbol{R}$，使得 $\frac{x+y}{2}\perp_R a\frac{x+y}{2}+y$，以下考虑 a 的取值范围.

i) $a=0$，此时 $\frac{x+y}{2}\perp_R y$，即有

$$\|\frac{x+y}{2}+ky\|=\|\frac{x+y}{2}-ky\|,\quad\forall k\in\boldsymbol{R}\tag{1}$$

在(1)式中取 $k=1$，我们得到

$$\text{左边}=\|\frac{x+y}{2}+y\|=2\neq1\geq\|\frac{x-y}{2}\|=\|\frac{x+y}{2}-y\|=\text{右边},\quad\text{故 } a\neq0.$$

ii) $a>0$，此时有 $\frac{x+y}{2}\perp_R a\frac{x+y}{2}+y$，即

$$\|\frac{x+y}{2}+k[\frac{a(x+y)}{2}+y]\|=\|\frac{x+y}{2}-k[\frac{a(x+y)}{2}+y]\|\quad\forall k\in\boldsymbol{R}\tag{2}$$

在(2)中取 $k=\frac{1}{1+a/2}$，得出

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\|(\frac{1}{2}+\frac{a/2}{1+a/2})x+(\frac{1}{2}+\frac{a/2}{1+a/2}+\frac{1}{1+a/2})y\|\\&=2+\frac{a/2}{1+a/2}>2,\\\text{右边}&=\|(\frac{1}{2}-\frac{a/2}{1+a/2})x+(\frac{1}{2}-\frac{a/2}{1+a/2}-\frac{1}{1+a/2})y\|\\&\leq\left|\frac{1}{2}-\frac{a/2}{1+a/2}\right|+\frac{1}{2}<2,\end{aligned}$$

故 $a\not>0$.

iii) $a<-1$，我们将 $k=-\frac{1}{a}$ 代入(2)式，于是有

$$\text{左边} = \left\|\frac{x+y}{2}-\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{2}(x+y)-\frac{y}{a}\right\| = -\frac{1}{a}<1,$$

$$\text{右边} = \left\|(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{a})y\right\| = 2+\frac{1}{a}>1,$$

故 $a \nless -1$.

iv) $-1<a<0$，这时在式（2）中取 $k=\frac{a}{4}$，于是

$$\text{左边} = \left\|(\frac{1}{2}+\frac{a^2}{8})x+(\frac{1}{2}+\frac{a^2}{8}+\frac{a}{4})y\right\| = 1+\frac{a^2}{4}+\frac{a}{4}<1,$$

故

$$\text{右边} = \left\|(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{8})x+(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{8}-\frac{a}{4})y\right\| = 1-\frac{a^2}{4}-\frac{a}{4}>1,$$

故 $a \notin (-1,0)$.

仅剩的可能性是$a=-1$，此时有

$$\left\|(\frac{1}{2}-\frac{k}{2})x+(\frac{1}{2}+\frac{k}{2})y\right\| = \left\|(\frac{1}{2}+\frac{k}{2})x+(\frac{1}{2}-\frac{k}{2})y\right\| \quad \forall k\in \boldsymbol{R} \tag{3}$$

注意到

$$2\left\|(\frac{1}{2}-\frac{k}{2})x+(\frac{1}{2}+\frac{k}{2})y\right\| \geq \|k(x-y)\|$$

以及 $x \neq y$ 的假设，我们有

$$\lim_{k\to\infty}\left\|(\frac{1}{2}-\frac{k}{2})x+(\frac{1}{2}+\frac{k}{2})y\right\| = \infty \tag{4}$$

现在，我们再一次利用引理条件，得知存在 $\beta\in\boldsymbol{R}$，使得 $\frac{3x+y}{4}\perp_R \beta\frac{3x+y}{4}+y$，即

$$\left\|\frac{3x+y}{4}+k\left[\frac{\beta(3x+y)}{4}+y\right]\right\| = \left\|\frac{3x+y}{4}-k\left[\frac{\beta(3x+y)}{4}+y\right]\right\| \quad \forall k\in\boldsymbol{R}, \tag{5}$$

完全类似于 i)—iv)，在（5）中令 $k=\frac{1}{4}$、$\frac{1}{\beta}$、$\frac{1}{4(1-\beta)}$，可知$\beta\neq 0$，$\beta \ngtr 0$，$\beta \nless -1$，$\beta\notin(-1,0)$．唯一的可能性是 $\beta=-1$，即

$$\left\|\frac{3x+y}{4}+k\left[\frac{-(3x+y)}{4}+y\right]\right\| = \left\|\frac{3x+y}{4}-k\left[\frac{-(3x+y)}{4}+y\right]\right\|, \quad \forall k\in\boldsymbol{R} \tag{6}$$

现在，第三次利用引理条件，得知存在 $\gamma\in\boldsymbol{R}$，使得 $x\perp_R \gamma x+y$．以下证明这样的 γ 不存在，造成与引理条件的矛盾．

若 $\gamma=-1$，我们有 $\|x+k(-x+y)\| = \|x-k(-x+y)\|$，$\forall k\in\boldsymbol{R}$，　即

$$\|(1-k)x+ky\| = \|(1+k)x-ky\|, \quad \forall k\in\boldsymbol{R} \tag{7}$$

我们用k代（3）式中 $(\frac{1}{2}+\frac{k}{2})$，得到

$$\|(1-k)x+ky\| = \|kx+(1-k)y\|, \quad \forall k\in\boldsymbol{R} \tag{8}$$

利用（7）和（8）式，使用归纳的方法不难验证，对一切正整数 n，有

$$\|(n+1)x-ny\| = \|y\| = 1.$$

这显然是与（4）式相驳的，即$\gamma \neq -1$．

最后，我们在

$$\|x+k(\gamma x+y)\| = \|x-k(\gamma x+y)\|, \quad \forall k\in\boldsymbol{R} \tag{9}$$

中取 $k=\frac{1}{\gamma}$及 $k=\frac{1}{3+\gamma}$，并且利用（6）式可知$\gamma \ngtr -1$，$\gamma \nless -1$．　■

F．A．Ficken[5]曾经证明了，E是抽象欧氏空间的充分必要条件是对一切满足 $\|x-y\|$

$=\|x+y\|$的x，$y\in E$，$\|x+ky\|=\|x-ky\|$，$\forall k\in\boldsymbol{R}$均成立．

有了以上准备工作，我们不难进行

定理 4 的证明 设x，$y\in E$，无妨设x，$y\neq 0$，$\|x+y\|=\|x-y\|$．由定理的条件知存在$a\in\boldsymbol{R}$使得$x\perp_R ax+y$，即

$$\|x+k(ax+y)\|=\|x-k(ax+y)\|,\quad \forall k\in\boldsymbol{R} \tag{1}$$

利用F. A. Ficken 的结果，我们仅需证明$a=0$．若$a\neq\pm 1$，我们在(1)中取$k=\frac{1}{1+a}$及$k=\frac{1}{1-a}$得到

$$\|(2a+1)x+y\|=\|x-y\|=\|x+y\|=\|(1-2a)x-y\|.$$

E. Z. Andalafte等人[6]指出，实Banach空间E是严格凸的当且仅当对于任意的x，y，$z\in E$，任意$C\in\boldsymbol{R}$，$\|x-[\lambda y+(1-\lambda)z]\|=C$至多有两个实根，不难验证这一结论在实赋范线性空间中仍然成立．由引理 4 知E是严格凸的，故$a=0$．若$a=1$，我们在（1）式中取$k=\frac{1}{2}$，得到

$$\|3x+y\|=\|x-y\|=\|x+y\|$$

这显然与E. Z. Andalafte等的结果相矛盾，故$a\neq 1$，完全类似地可验证$a\neq -1$．这就完成了定理 4 的证明．

利用引理 3 、定理 3 和定理 4 ，容易得到

定理 5 若由$x\perp_{L^p}y$，可推出$x\perp_J y$或由$x\perp_J y$可推出$x\perp_{L^p}y$，则E是一个抽象欧氏空间．

推论 1 设$p>1$，若E内的L^p-正交是齐性的，则E是一个抽象欧氏空间．

推论 2 设$p>1$，若E内的L^p-正交是可加的，则E是一个抽象欧氏空间．

关于p，我们还不难得出

定理 6 设$p>1$，若E内L^p-正交满足以下之一条：

i） 齐性；

ii） 可加性；

iii） 由$x\perp_{L^p}y$推出$x\perp_J y$；

iv） 由$x\perp_J y$推出$x\perp_{L^p}y$，

则必有$p=2$．

证明 设E内L^p-正交满足其中一条，我们取$x\neq y$，$\theta\neq x$，$y\in E$，$x\perp_{L^p}y$．由定理1，定理2或引理2知$x\perp_J y$，于是可设$\|x\|=1$，$\|y\|=2$．再利用定理5知E是一个抽象欧氏空间，于是有$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$，结合$\|x+y\|^p=\|x\|^p+\|y\|^p$就得到$(1+2^p)^{1/p}=(1+4)^{1/2}$，因此$p=2$． ■

R. C. James[3]还定义了如下两种正交，等腰正交：x，$y\in E$，称x等腰正交于y，当且仅当$\|x+y\|=\|x-y\|$．以及毕达哥拉斯正交：x，$y\in E$，称x与y是毕达哥拉斯正交当且仅当$\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$．他还证明了这两种正交都具有（*）性质：

（*） $\forall x$，$y\in E$，都存在$a\in\boldsymbol{R}$，使得$x\perp ax+y$．E. Z. Andalafte等人[7]还定义了(α,β)-正交：α，$\beta\in\boldsymbol{R}$，α，$\beta\neq 1$，x，$y\in E$，x与y (α,β)-正交当且仅当$\|x-y\|^2+\|\alpha x-\beta y\|^2=\|x-\beta y\|^2+\|y-\alpha x\|^2$．他们还证明了$(\alpha,\beta)$-正交具有（*）性质．利用定理4我们可知

定理7 E中定义的L^p-正交、James正交、等腰正交、毕达哥拉斯正交或(α,β)-正交中有一个可推出Roberts正交，则E必是抽象欧氏空间.

笔者对定光桂教授的指导帮助表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] Sullivan, F. E., Structure of Real L^p-spaces, J. Math. Anal. and Appl. 32(1970), 621—629.

[2] 刘证, L^p-Orthogonality in Banach Spaces, 数学研究与评论, Vol.4. No.4. (1984), 31—35.

[3] James, R. C., Orthogonality in Normed Linear Spaces, Dake Math. J. 12(1945), 291—302.

[4] James, R. C., Orthogonality and Linear Functionals in Normed Limear Spaces, Trans Amer. Math. Soc. 61(1947), 265—292.

[5] Ficken, F. A., Note on the Existence of Scalar Products in Normed Linear Spaces, Annals of Math. Vol. 45(1944), 362—366.

[6] Andalafte, E. Z. and Valentine, J. E., Criteria for Unique Metric Lines in Banach Spaces, Proc. of Amer. Math. Soc. Vol. 39. No2. July 1973, 367—370.

[7] Andalafte, E. Z., Diminnie, C. R. and Freese, R. W., (α,β)-Orthogonality and a Characterization of Inner Product Spaees, Math. Japonica 30, No.3 (1985), 341—349.

L^p-Orthogonality in Real Normed Linear Spaces

Li Xinbao

(Nankai University)

Abstract

In this paper we have proved the theorem: Let $p>1$, and E be a real normed linear space, if the L^p-orthogonality in E satisfies one of the following conditions 1) homogeneity 2) additivity 3) $x\perp_{L^p}y$ implies $x\perp_J y$ 4) $x\perp_J y$ implies $x\perp_{L^p}y$, then E is an abstract Euclidean space and there must be $p=2$. We also proved an R. C. James' result——If for every element x of a normed linear space E there can be found a nonzero element orthogonal to x by Roberts' definition in each two dimensional linear subset containing x, then E is an abstract Euclidean space—— which had not been proved. Finally, we point out that if one of the James', L^p-, isosceles, Pythagorean and (α,β)-orthogonalities defined in E implies Roberts' orthogonality then E is an abstract Euclidean space.