第11卷 第4期
1991年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.4
Nov., 1991

图的边-色多项式*

唐廷载 韩绍岑

（四川师范学院数学系，南充）

在研究图的边着色问题时，不仅要研究边着色的存在性，而且还要研究边着色的数目．为此，本文首次引入图的边-色多项式概念，并进行了初步的研究．我们认为，图的边－色多项式同图的（点）色多项式[1],[2]一样，是研究图的着色问题的重要工具．我们讨论的图是有限、无向且无孤立点的简单图．图 $G=(V,E)$ 的一个 λ-边着色 π 是一个映射 $\pi: E(G)\to\{1,2,\cdots,\lambda\}$，使得对 G 的任二邻接的边 x 和 y，有 $\pi(x)\neq\pi(y)$．显然，$|\{\pi|\pi$ 是 G 的 λ-边着色$\}|$ 是关于 λ 的多项式，我们称之为 G 的边－色多项式，记为 $Q(G,\lambda)$．若对满足 $|V(H)|=|V(G)|$ 和 $Q(H,\lambda)=Q(G,\lambda)$ 的任意图 H，都有 $H\cong G$，则称 G 的边－色多项式 $Q(G,\lambda)$ 是拟色唯一的．在本文中，P_n 表示有 n 条边的路，$S(n)$ 表示有 n 条边的星图，K_n 是 n 阶完全图，$K_{n,n}$ 是两部顶点数都是 n 的完全二部图，$\bigcup_{i=1}^{m} C_n$ 是 m 个相同的圈 C_n 的不相交的并，T_n 是 n 阶树．关于图的边－色多项式，我们得到以下一些结果．

定理1 若 n 阶图 G 的边－色多项式为

$$Q(G,\lambda)=a_0\lambda^{b}-a_1\lambda^{b-1}+a_2\lambda^{b-2}-\cdots+(-1)^k a_k\lambda^{b-k}\quad(0\leq k\leq b-1,a_0=1,a_k\neq 0)$$

则 $b=|E(G)|$，$b-k=\omega(G)$，$a_1=\sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{2}$，$a_2=\binom{a_1}{2}-\sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{3}-N(\triangle)$ 其中 $d_i=d_G(v_i)$，$\omega(G)$ 是 G 的分支数，$N(\triangle)$ 是 G 中三角形的数目．

定理2 下列各图的边－色多项式是拟色唯一的：

（1）P_n；（2）$S(n)$；（3）K_n；（4）$K_{n,n}$；（5）$\bigcup_{i=1}^{m} C_n$；（6）$T_n(n\leq 5)$．

定理3 存在阶数 $n>5$ 的树 T_n，其边－色多项式 $Q(T_n,\lambda)$ 非拟色唯一．

参考文献

[1] R. C. Read, An introduction to chromatic polynomials, J. Combinatorial Theory 4(1968), 52—71.

[2] E. J. Farrell, On chromatic coefficients, Discrete Math., 3(1980), 257—264.

* 1989年11月25日收到，1991年6月13日收到修改稿．