第11卷 第4期 数学研究与评论 Vol.11 No.4
1991年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 1991

af的拓扑度及其应用*

赵 增 勤
（曲阜师范大学数学系，曲阜）

摘 要

本文首先对R^n中连续映象讨论了$af(a\neq 0)$与f的Brouwer度之间的关系，得到了Brouwer度的几个等式，顺便推出几个不动点定理．在此基础上研究了投影完备的实Banach空间中A-proper映象f与af的广义拓扑度之间的联系．作为应用，推广了关于P_1紧映象的Altman不动点定理．

Brouwer度是最基本而重要的拓扑度．关于Brouwer度的基本性质与结论见[1]、[2]、[3]、[4]．下面的定理1是Brouwer度的另一条基本性质．

定理1 设Ω是R^n中的有界开集，$f:\overline{\Omega}\to R^n$连续，$p\in R^n\setminus(af)(\partial\Omega)$ $(a\neq 0)$ （1）

则
$$\deg(af,\Omega,p)=(\operatorname{sgn}a)^n\deg(f,\Omega,\frac{1}{a}p) \tag{2}$$

证明 显然等式两端都存在，只需证相等．首先设f是C^2映象．

（i） 若 $p\overline{\in}(af)(N_{af})$，则 $\frac{1}{a}p\overline{\in}f(N_f)$ （3）

（其中$N_f=\{x|J_f(x)=0\}$，$J_f^{(x)}$表示f在x点的雅可比行列式）．这是因为，假若存在$x_0\in N_f$使$f(x_0)=\frac{1}{a}p$，由$J_f(x_0)=0$得：$J_{af}(x_0)=a^nJ_f(x_0)=0$，且$af(x_0)=p$，得$p\in(af)(N_{af})$与题设矛盾．由(3)式利用[1]第二章定理1.2得到

$$\deg(af,\Omega,p)=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{sgn}J_{af}(x_i) \tag{4}$$

其中x_i表示方程$af(x)=p$在Ω内的解．也得到

$$\deg(f,\Omega,\frac{1}{a}p)=\sum_{i=1}^{l}\operatorname{sgn}J_f(y_i) \tag{5}$$

其中y_i表示方程$f(x)=\frac{1}{a}p$在Ω内的解．显然$m=l$，$x_i=y_i$，$i=1,2,\cdots,m$．由(4)、(5)式得：

$$\begin{aligned}\deg(af,\Omega,p)&=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{sgn}J_{af}(x_i)=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{sgn}[a^nJ_f(x_i)]\\&=\sum_{i=1}^{m}(\operatorname{sgn}a^n)\cdot\operatorname{sgn}J_f(x_i)=(\operatorname{sgn}a)^n\sum_{i=1}^{m}\operatorname{sgn}J_f(y_i)\\&=(\operatorname{sgn}a)^n\deg(f,\Omega,\frac{1}{a}p).\end{aligned}$$

* 1989年11月6日收到．

(ii) 若 $p\in(af)(N_{af})$，即存在 $x_0\in\Omega$，使 $J_{af}(x_0)=0$，$af(x_0)=p$. 记 $\tau=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-\frac{1}{a}p\|$,由（1）式知 $\tau>0$ 且 $\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|af(x)-p\|=|a|\tau>0$,由sard定理（见[1]）知存在 $p_1\in R^n$ 使 $\|p_1-p\|<\frac{|a|\tau}{7}$，且 $p_1\bar{\in}(af)(N_{af})$. 这时 $\|\frac{1}{a}p_1-\frac{1}{a}p\|<\frac{\tau}{7}$ 且由（3）式知 $\frac{1}{a}p_1\bar{\in}f(N_f)$ 由证得的(i)和[1]中p106注5得到：

$$\deg(af,\Omega,p)=\deg(af,\Omega,p_1)$$
$$=(\operatorname{sgn}a)^n\deg(f,\Omega,\frac{1}{a}p_1)=(\operatorname{sgn}a)^n\deg(f,\Omega,\frac{1}{a}p)$$

这就对 $f\in C^2(\overline{\Omega})$ 时证明了定理1.

当 f 为一般连续映象时，由[1]引理1.5知可取到 $g\in C^2(\overline{\Omega})$ 使 $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|g(x)-f(x)\|<\tau$ 从而 $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|af(x)-ag(x)\|<|a|\tau$.

由 Brouwer度的定义1.2([1]) 和关于 C^2 映象的结果得

$$\deg(af,\Omega,p)=\deg(ag,\Omega,p)$$
$$=(\operatorname{sgn}a)^n\deg(g,\Omega,\frac{1}{a}p)=(\operatorname{sgn}a)^n\deg(f,\Omega,\frac{1}{a}p)$$

至此定理1证毕.

显然定理1对于有限维实Banach空间中连续映象也成立，这就是：

定理1′ 设 E_n 是 n 维实Banach空间，Ω 是 E_n 中有界开集，$f:\overline{\Omega}\to E_n$ 连续，$p\in E_n\setminus(af)(\partial\Omega)$，$a\neq0$. 则 $\deg(af,\Omega,p)=(\operatorname{sgn}a)^n\deg(f,\Omega,\frac{1}{a}p)$.

推论1 设 Ω 是实Banach空间 E_n 中的有界开集，$p\in\Omega$ 则 $\deg(-I,\Omega,p)=(-1)^n\deg(I,\Omega,p)=(-1)^n$.

定理2 设 Ω 是 R^n 中的有界开集，$f,g:\overline{\Omega}\to R^n$ 连续，且当 $x\in\partial\Omega$ 时，$f(x)\neq g(x)$，$g(x)\neq\theta$，和满足下列条件之一：

(i) $\|f(x)-g(x)\|^{2m}\le\|g(x)\|^{2m}-\|f(x)\|^{2m}$ （m 为某自然数）

(ii) $\|f(x)\|\le\|g(x)\|$

(iii) $(f(x),g(x))\le\|g(x)\|^2$

(iv) $\|f(x)-g(x)\|^{2m}\ge\|f(x)\|^{2m}-\|g(x)\|^{2m}$ （m 为某自然数）

则成立 $\deg(g-f,\Omega,\theta)=\deg(g,\Omega,\theta)$.

证明 显然有(i)⇒(ii)⇒(iii)，当(iii)成立时有

$$\|f(x)-g(x)\|^2=\|f(x)\|^2-2(f(x),g(x))+\|g(x)\|^2$$
$$\ge\|f(x)\|^2-2\|g(x)\|^2+\|g(x)\|^2=\|f(x)\|^2-\|g(x)\|^2$$

这是(iv)中 $m=1$ 的情形。于是我们只要在条件(iv)下证明定理的结论即可.

令 $h_t(x)=H(t,x)=tf(x)-\frac{t+1}{2}g(x)$，$x\in\overline{\Omega}$，$0\le t\le1$. 则 $H:[0,1]\times\overline{\Omega}\to R^n$ 连续，下证 $\theta\bar{\in}h_t(\partial\Omega)$，$0\le t\le1$.

假若存在 $0\le t_0\le1$，$x_0\in\partial\Omega$ 使 $H(t_0,x_0)=t_0f(x_0)-\frac{t_0+1}{2}g(x_0)=\theta$. 即成立

$$g(x_0)=\frac{2t_0}{t_0+1}f(x_0)\qquad(6)$$

显然，$t_0\neq0$，因否则由(6)式得到 $g(x_0)=\theta$ 与题设条件矛盾. $t_0\neq1$，因否则由(6)式

得到$g(x_0)=f(\mathring{x}_0)$，也与题设矛盾．从而$0<t_0<1$．由(6)式及题设知$f(x_0)\neq\theta$，把(6)式代入(iv)消去$\|f(x_0)\|^2$得

$$\left(\frac{2t_0}{t_0+1}-1\right)^{2m}\geq 1-\left(\frac{2t_0}{t_0+1}\right)^{2m},\quad (0<t_0<1) \tag{7}$$

令
$$\varphi(t)=\left(\frac{2t}{t+1}-1\right)^{2m}+\left(\frac{2t}{t+1}\right)^{2m}-1,\quad 0\leq t\leq 1,$$

则
$$\varphi'(t)=2m\left[\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{2m-1}+\left(\frac{2t}{t+1}\right)^{2m-1}\right]\frac{2}{(t+1)^2}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t)&=2m(2m-1)\left[\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{2m-2}+\left(\frac{2t}{t+1}\right)^{2m-2}\right]\frac{4}{(t+1)^4}\\&\quad+2m\left[\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{2m-1}+\left(\frac{2t}{t+1}\right)^{2m-1}\right]\frac{-4}{(t+1)^3}\\&=\frac{8m}{(t+1)^4}\left\{\left[\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{2m-2}\cdot\left[2m-1-\frac{t-1}{t+1}(t+1)\right]\right.\right.\\&\quad\left.\left.+\left(\frac{2t}{t+1}\right)^{2m-2}\cdot\left[2m-1-\frac{2t}{t+1}(t+1)\right]\right]\right\}\\&=\frac{8m}{(t+1)^4}\left[\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{2m-2}(2m-t)+\left(\frac{2t}{t+1}\right)^{2m-2}(2m-1-2t)\right]\end{aligned}$$

当$m=1$时，$\varphi''(t)=\dfrac{8}{(t+1)^4}(3-3t)>0$, $0<t<1$,

当$m\geq2$时，$2m-t>0$, $2m-1-2t>0$.

从而$\varphi''(t)>0$，对$0<t<1$．即$\varphi(t)$是$[0,1]$区间上的严格凸函数．又$\varphi(0)=\varphi(1)=0$，从而$\varphi(t)<0$，$0<t<1$，也就是$\left(\dfrac{2t}{t+1}-1\right)^{2m}<1-\left(\dfrac{2t}{t+1}\right)^{2m}$，这与(7)式矛盾．这就证明了$\theta\,\overline{\in}\,h_t(\partial\Omega)$，$0\leq t\leq 1$.

由定理1和Brouwer度的同伦不变性得：

$$\begin{aligned}&\deg(g-f,\Omega,\theta)=(-1)^n\deg(f-g,\Omega,\theta)=(-1)^n\deg(h_1,\Omega,\theta)\\&=(-1)^n\deg(h_0,\Omega,\theta)=(-1)^n\deg\left(-\frac{1}{2}g,\Omega,\theta\right)=\deg(g,\Omega,\theta).\end{aligned}$$

定理3 设Ω是R^n中的有界开集，$f,g:\overline{\Omega}\to R^n$连续，且当$x\in\partial\Omega$时，$f(x)\neq g(x)$，$g(x)\neq\theta$，和满足下列条件之一

(i) $(f(x),g(x))\geq\|g(x)\|^2$

(ii) $\|f(x)-g(x)\|^{2m}\leq\|f(x)\|^{2m}-\|g(x)\|^{2m}$，$m$为某自然数，则成立：

$$\deg(g-f,\Omega,\theta)=(-1)^n\deg(g,\Omega,\theta).$$

证明 设(i)满足，于是有

$$\|f(x)-g(x)\|^2=\|f(x)\|^2-2(f(x),g(x))+\|g(x)\|^2\leq\|f(x)\|^2-\|g(x)\|^2$$

这就是(ii)中$m=1$的情形．从而只要对条件(ii)下证明定理的结论即可．

令 $h_t(x)=H(t,x)=(2t-1)g(x)-tf(x)$，$0\leq t\leq 1$，$x\in\overline{\Omega}$.

显然$H:[0,1]\times\overline{\Omega}\to R^n$连续，且$\theta\,\overline{\in}\,h_t(\partial\Omega)$，$0\leq t\leq 1$.

事实上，假若存在$0\leq t_0\leq 1$，$x_0\in\partial\Omega$使$H(t_0,x_0)=(2t_0-1)g(x_0)-t_0f(x_0)=\theta$.

类似定理2的证法得：

$$0<t_0<1,\ \text{且}\ f(x_0)=\frac{2t_0-1}{t_0}g(x_0) \tag{8}$$

从而 h 在Ω内有零点．条件（iii）之下获证．

再设条件（iv）被满足．由于 $x\in\partial\Omega$ 时，$h(x)\neq x$，（iv）相当于定理 2（i）中取 $f=h$，$g=I$

所以
$$\deg(I-h,\Omega,\theta)=\deg(I,\Omega,\theta)=1 \tag{11}$$

由 Brouwer 度性质知 h 在Ω内有不动点．

设 h 在$\partial\Omega$上没有零点（否则结论被得到）．又已设在$\partial\Omega$上$h(x)\neq x$，（iv）相应于在定理 3（ii）中取 $f=I$，$g=h$，所以：$\deg(h-I,\Omega,\theta)=(-1)^n\deg(h,\Omega,\theta)$，代入（11）式用定理1

得
$$\deg(h,\Omega,\theta)=(-1)^n\deg(h-I,\Omega,\theta)=1$$

从而 h 在Ω内有零点（推论 3 证毕）．

注 推论 3 是［5］中某些不动点定理的补充和改进．

下面把定理 1 推广到 A-proper 映象的广义拓扑度，关于 A-proper 映象及其广义拓扑度的讨论见［1］、［6］、［7］，这里用［1］的定义．

定理 4 设实 Banach 空间 E 是投影完备的，Ω是 E 中有界开集，$f:\overline{\Omega}\to E$ 是 A-proper 映象，$p\in E\setminus f(\partial\Omega)$，则

（i） $a>0$ 时，$\mathrm{Deg}(af,\Omega,ap)=\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)$

（ii） $a<0$ 时，$\mathrm{Deg}(af,\Omega,ap)\subset\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)\cup-\mathrm{Deg}(f,\Omega,\theta)$

其中
$$-\deg(f,\Omega,p)=\{-r\,|\,r\in\deg(f,\Omega,p)\}$$

证明 任给 $r\in\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)$，按照定义存在$\{n\}$的子列$\{n_k\}$使 $\deg(\theta_{n_k}f,\Omega_{n_k},Q_{n_k}(p))\to r$（其中$\Gamma=\{X_n,Q_n\}$为 E 的逼近格式，$\Omega_n=\Omega\cap X_n$，$n=1,2,\cdots$）应用定理 1′ 得到：

$$\deg(Q_{n_k}(af),\Omega_{n_k}Q_{n_k}(ap))=\deg(Q_{n_k}f,\Omega_{n_k},Q_{n_k}(p))\to r\ .$$

按照定义得 $r\in\mathrm{Deg}(af,\Omega,ap)$，从而 $\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)\subset\mathrm{Deg}(af,\Omega,ap)$．同理

$$\mathrm{Deg}(af,\Omega,ap)\subset\mathrm{Deg}(\frac{1}{a}(af),\Omega,\frac{1}{a}(ap))=\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)$$

得到
$$\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)=\mathrm{Deg}(af,\Omega,ap)\quad(a>0)$$

（ii）（$a<0$ 时）$\forall r\in\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)$，按定义知存在$\{n\}$的子列$\{n_k\}$使 $\deg(Q_{n_k}(af)\to r,\Omega_{n_k},Q_{n_k}(p))\to r$ 由定理 1 得

$$\mathrm{Deg}(Q_{n_k}(af),\Omega_{n_k},Q_{n_k}(ap))=(-1)^{n_k}\mathrm{Deg}(Q_{n_k}f,\Omega_{n_k},Q_{n_k}(p))$$

若$\{n_k\}$中有无限项是偶数，记这无限项组成的子列为$\{n_{ki}\}$，从而

$$\deg(Q_{n_{ki}}(af),\Omega_{n_{ki}},Q_{n_{ki}}(ap))\to r\qquad(i\to\infty)$$

得 $r\in\mathrm{Deg}(af,\Omega,ap)$．若$\{n_k\}$有无限项是奇数，同理得 $-r\in\mathrm{Deg}(af,\Omega,ap)$，所以

$$\mathrm{Deg}(f,\Omega,p)\subset\mathrm{Deg}(af,\Omega,ap)\cup-\mathrm{Deg}(af,\Omega,ap)$$ ■

下面的定理 5 是定理 4 的应用，它推广了 p_1 紧映象的 Altman 不动点定理（见［1］）．

定理 5 设 E 是投影完备的实 Banach 空间，Ω是 E 中有界开集，$\theta\in\Omega$．$A:\overline{\Omega}\to E$ 是 P_1 紧映象且满足 $x\in\partial\Omega$ 时

$$\|Ax-x\|^{2m}\geq\|Ax\|^{2m}-\|x\|^{2m}，\ m\text{ 为某自然数} \tag{12}$$

则 A 在$\overline{\Omega}$中有不动点．

证明 可设 A 在$\partial\Omega$上没有不动点，（否则定理已获证）．令

$$h_t(x)=H(t,x)=tAx-\frac{t+1}{2}x,\qquad 0\leq t\leq 1,\quad x\in\overline{\Omega}$$

显然 $H:[0,1]\times\overline{\Omega}\to E$ 连续，并且对每一个固定的 $t\in[0,1]$，$h_t:\overline{\Omega}\to E$ 是 A-proper 映象．这是因为：$h_0=-\frac{1}{2}I$ 是 A-proper 映象．$1\geq t>0$ 时，$\frac{1}{2t}\leq\frac{1}{2}$，从而 $\frac{t+1}{2t}\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$．由于

将(8)式代入条件(ii)和注意到$g(x_0)\neq\theta$得到

$$(\frac{2t_0-1}{t_0}-1)^{2m}\leq(\frac{2t_0-1}{t_0})^{2m}-1 \tag{9}$$

令 $$\varphi(t)=(\frac{2t-1}{t}-1)^{2m}-(\frac{2t-1}{t})^{2m}+1,\quad 0<t\leq 1.$$

则 $$\varphi'(t)=\frac{2m}{t^{2m+1}}(1-t)^{2m-1}[(\frac{1-2t}{1-t})^{2m-1}-1]\quad 0<t<1.$$

由$(\frac{1-2t}{1-t})^{2m-1}<1$得$\varphi'(t)<0$，即$\varphi(t)$在区间$(0,1)$上严格单调减少．又$\lim\limits_{t\to 1-0}\varphi(t)=\varphi(1)=0$，从而在$(0,1)$上$\varphi(t)>0$，即$0<t<1$时，$(\frac{2t-1}{t}-1)^{2m}>(\frac{2t-1}{t})^{2m}-1$，这与(9)式矛盾．从而证得$\theta\,\overline{\in}\,h_t(\partial\Omega)$，$0\leq t\leq 1$．根据Brouwer度的同伦不变性得：

$$\begin{aligned}\deg(g-f,\Omega,\theta)&=\deg(h_1,\Omega,\theta)=\deg(h_0,\Omega,\theta)\\&=\deg(-g,\Omega,\theta)=(-1)^n\deg(g,\Omega,\theta).\end{aligned}$$

(最后一个等号是用了定理1)(证毕)．

推论2 设Ω是R^n中有界开集，$f,g:\overline{\Omega}\to R^n$连续，且当$x\in\partial\Omega$时，$f(x)\neq\theta$，$g(x)\neq\theta$．

(i) 若 $(f(x),g(x))\leq 0$，$\forall x\in\partial\Omega$，则$\deg(f,\Omega,\theta)=(-1)^n\deg(g,\Omega,\theta)$，

(ii) 若 $(f(x),g(x))\geq 0$，$\forall x\in\partial\Omega$，则$\deg(f,\Omega,\theta)=\deg(g,\Omega,\theta)$．

证明 若 $(f(x),g(x))\leq 0$，$\forall x\in\partial\Omega$，则：

$$\|g(x)\|^2-(g(x)-f(x),g(x))=(g(x)-[g(x)-f(x)],g(x))=(f(x),g(x))\leq 0$$

由定理3得$\deg(g-[g-f],\Omega,\theta)=(-1)^n\deg(g,\Omega,\theta)$，即

$$\deg(f,\Omega,\theta)=(-1)^n\deg(g,\Omega,\theta).$$

若$(f(x),g(x))\geq 0$，$\forall x\in\partial\Omega$，则$(f(x),-g(x))\leq 0$，由(i)及定理1得：

$$\deg(f,\Omega,\theta)=(-1)^n\deg(-g,\Omega,\theta)=\deg(g,\Omega,\theta).$$

推论3 设Ω是R^n中有界开集，$\theta\in\Omega$，$h:\overline{\Omega}\to R^n$连续，且当$x\in\partial\Omega$时$h(x)\neq x$和满足下列条件之一：

(i) $(h(x),x)\geq\|x\|^2$

(ii) $(x,h(x))\geq\|h(x)\|^2$

(iii) $\|h(x)-x\|^{2m}\leq\|h(x)\|^{2m}-\|x\|^{2m}$

(iv) $\|h(x)-x\|^{2m}\leq\|x\|^{2m}-\|h(x)\|^{2m}$，，$m$为某自然数，则$h$在$\overline{\Omega}$内有零点和不动点．

证明 显然由(i)可推出(iii) $m=1$的情形．由(ii)可推出(iv) $m=1$的情形．所以分别对条件(iii)和(iv)之下证所述结论成立即可．

设条件(iii)被满足，由于h在$\partial\Omega$上没有不动点，这相当于在定理3(ii)中取$g=I$，$f=h$，所以：

$$\deg(I-h,\Omega,\theta)=(-1)^n\deg(I,\Omega,\theta)=(-1)^n \tag{10}$$

从而h在Ω内有不动点．

设h在$\partial\Omega$上没有零点(否则定理获证)．又已设在$\partial\Omega$上$h(x)\neq x$，(iii)又相当于在定理2(i)中取$g=h$，$f=I$．所以：$\deg(h-I,\Omega,\theta)=\deg(h,\Omega,\theta)$，代入(10)式得

$$\deg(h,\Omega,\theta)=(-1)^n\deg(I-h,\Omega,\theta)=1,$$

A是P_1紧映象，从而$t\in(0,1]$时$A-\frac{t+1}{2t}I$是A-proper映象．得到$h_t=t(A-\frac{t+1}{2t}I)$是A-proper映象．

由p_1紧映象A和恒等映象I都是有界的，易得$H(t,x)$对于t在任何点$t_0\in[0,1]$的连续性关于$x\in\overline{\Omega}$是一致的．

在定理2(iv)中g取为I，f取为A，同样的方法可得到$\theta\bar{\in}h_t(\partial\Omega)$，$0\leq t\leq 1$．利用定理4和$A$-proper映象广义拓扑度的同伦不变性得：

$$\mathrm{Deg}(A-I,\Omega,\theta)=\mathrm{Deg}(h_1,\Omega,\theta)=\mathrm{Deg}(h_0,\Omega,\theta)$$

$$=\mathrm{Deg}(-\frac{1}{2}I,\Omega,\theta)\subset\mathrm{Deg}(I,\Omega,\theta)\cup-\mathrm{Deg}(I,\Omega,\theta)$$

$$=\{1,-1\}.\ 即\mathrm{Deg}(A-I,\Omega,\theta)\neq\{0\}$$

由可解性得A在Ω内有不动点． ■

作者感谢郭大钧教授的指导．

参 考 文 献

[1] 郭大钧，非线性泛函分析，山东科学技术出版社(1985)．

[2] 陈文嫄，非线性泛函分 ，甘肃人民出版社(1982)．

[3] J. T. Schwarty. Nonlinear functianal analysis. New York. 1969.

[4] M. S. Berger. Nonlinear and functinal analysis. New York. 1977.

[5] 张石生，不动点理论及应用， 庆出版社，1984．

[6] F. E. Browder, W. V. Petryshyn, Approximation mathods and generalized topological degree for nonlinear mappings in Banach spaces J. Functional Anal, 3(1969), 217—245.

[7] W. V. Petryshyn. On the approximation-solvability of equations involving A-proper and pseudo-A-proper mappings, Bull.Amer. Math Soc, 81(1975), 223—312.

Topological Degree of the Mapping *af* and Applications

Zhao Zengqin

(Dept. Math. Qufu Mormal University Qufu, Shandong)

Abstract

In this paper, we first discuss the relations between Brouwer degree of the continuous mapping in R^n f and the degree of the mapping **af**, obtain some equalities on Brouwer degrees and some fixed point theorems, then study the relations between generalized topological degrees of the mappings **f** and **af**, which are A-proper mappings in real Banach space with a projectively complete scheme. As applications, we generalize Altman fixed point theorem on P_1 compact mappings.