第11卷 第4期
1991年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.4
Nov., 1991

关于简单MCD图的几个定理*

施 永 兵
(上海师范大学数学系)

设G是一个图(简单图),若G中没有两个等长圈,则称G为圈分布图(简单圈分布图),简称CD图(简单CD图).若G是CD图(简单CD图)且有n个顶点和最大可能的边数,则称G为最大圈分布图(最大简单圈分布图),简称MCD图(简单MCD图).用$f(n)$和$f^*(n)$分别表示n个顶点的MCD图和简单MCD图的边数.确定$f(n)$的问题是Erdös提出的至今未解决的问题(见[3]).与确定$f(n)$直接有关的问题是确定MCD图.

在[1]中已经证明了对每个整数$n\geq 2$.存在n个顶点的含有环和2圈的MCD图.这表明可以从每个$n-1$个顶点的简单MCD图出发构造n个顶点的MCD图,而且$f(n)=f^*(n-1)+3$.于是确定$f(n)$的问题转化为确定$f^*(n)$的问题,而确定MCD图的问题转化为确定简单MCD图问题.

关于$f^*(n)$,已经得到

定理A[1] 对每个$n\geq 2$,$f^*(n)\geq n+[(\sqrt{8n-15}-3)/2]$.

定理B[2] $f^*(n)\geq n+k+[(\sqrt{8n-24k^2+8k+1}-5)/2]$,其中$k=[(\sqrt{21n-5}+11)/21]$.

定理C[2] 若G是有n个顶点的2连通的简单MCD图,则$f^*(n)\leq n+[(\sqrt{8n-15}-3)/2]$.

本文主要结果是

定理1 所有2连通非平面图都不是简单MCD图.

定理2 对$n\overline{\in}\{10,11,14,15,16,21,22\}$,所有$n$个顶点的包含了同胚于$K_4$的子图的2连通图都不是简单MCD图.

为证定理1和2,首先引入路分解概念.

设G是一个2连通图,C是G的任意一个圈.本文总认为把不在C上的顶点和边全画在圈C内部.令$P_0=C$,用下述方法构造路序列P_1,P_2,……,P_k:对$i=1,2,\cdots,k$,从$G-\bigcup_{j=0}^{i-1}E(P_j)$中取路$P_i$,使它的两个端点且仅仅这两个端点在$\bigcup_{j=0}^{i-1}P_j$中,而$E(G)-\bigcup_{j=0}^{k}E(P_j)=\phi$.易见,因$G$是2连通的,故上述方法是可行的.我们称$(P_1,P_2,\cdots,P_k)$是$G-E(C)$的一个路分解.称每个$P_i$为$G$的关于$C$的内路,在不引起混淆时,简称为$G$的内路.

关于G的内路数,我们已有

命题A[1] 给定2连通图G,C是G的任意一个圈,j是$G-E(C)$的任一路分解中的

* 1989年12月22日收到.

内路数，则 $j=|E(G)|-|V(G)|$.

应用路分解的概念和数学归纳法容易证明下述两个命题.

命题 1 设 G 是 2 连通图，$j=|E(G)|-|V(G)|$. 若 G 含同胚于 K_4 的子图，则 G 的含圈数

$$m(G)\geq (j^2+5j)/2$$

命题 2 设 G 是 2 连通图，$j=|E(G)|-|V(G)|$. 若 G 是非可平面图，则 G 的含圈数

$$m(G)\geq (j^2+7j)/2.$$

定理 1 的证明 由定理 A 知，简单MCD图的边数 $f^*(n)\geq n+[(\sqrt{8n-15}-3)/2]$.

令
$$j=[(\sqrt{8n-15}-3)/2] \qquad (1)$$

倘若 G 是 2 连通非可平面图而且是简单MCD图，则 G 至少有 j 条内路. 由命题 2 知，G 的含圈数
$$m(G)\geq (j^2+7j)/2.$$

从而 G 的顶点数
$$n\geq (j^2+7j)/2+2 \qquad (2)$$

从（1）得
$$n<(j^2+5j)/2+5 \qquad (3)$$

由于 G 是非可平面图，故 $j\geq 3$. 因此由（2）和（3）得
$$n\geq (j^2+7j)/2+2=(j^2+5j)/2+j+2\geq (j^2+5j)/2+5>n,$$

矛盾. ■

定理 2 的证明 由定理 B 知，简单MCD图的边数
$$f^*(n)\geq n+k+[(\sqrt{8n-24k^2+8k+1}-5)/2],$$

其中
$$k=[(\sqrt{21n-5}+11)/21] \qquad (1)$$

令
$$j=k+[(\sqrt{8n-24k^2+8k+1}-5)/2] \qquad (2)$$

设 $n\overline{\in}\{10,11,14,15,16,21,22\}$，$G$ 是 n 个顶点的含有同胚于 K_4 的子图的 2 连通简单图. 倘若 G 是简单MCD图，则 G 至少有 j 条内路. 由命题 1 知，G 的含圈数 $m(G)\geq (j^2+5j)/2$，从而 G 的顶点数
$$n\geq (j^2+5j)/2+2 \qquad (3)$$

由（2）得
$$n<(j^2+5j)/2+5+(7k-2-2j)(k-1)/2 \qquad (4)$$

由（1）得
$$21k^2-22k+6\leq n<21k^2+20k+5 \qquad (5)$$

应用（2）和（5）得
$$j-1<7k\leq j+6 \qquad (6)$$

由（6）的右边不等式和（4）得
$$n<(j^2+5j)/2+5+(4-j)(k-1)/2 \qquad (7)$$

当 $k\geq 3$ 时，由（5）和（6）得 $n\geq 129$，$j\geq 15$. 此时从（7）得 $n<(j^2+5j)/2+5-11$，这与（3）矛盾.

当 $k=2$ 时，由（5）和（6）得，$46\leq n<129$，$8\leq j<15$. 此时从（7）得 $n<(j^2+5j)/2+3$.

结合（3）得
$$n=(j^2+5j)/2+2.$$

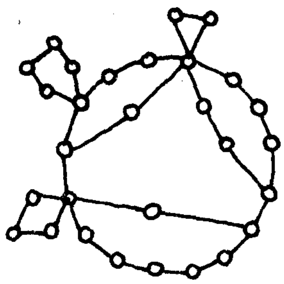
当 $k=1$ 时，$5\leq n<46$，$1\leq j<8$. 由于 G 有同胚于 K_4 的子图，故 $j\geq 2$，G 的含圈数 $m(G)\geq 7$，从而 $n\geq 9$. 因此只须考虑 $9\leq n<46$ 和 $2\leq j<8$ 时的情况. 此时从（7）得
$$n<(j^2+5j)/2+5.$$

结合（3）得
$$n\in\{(j^2+5j)/2+2,\ (j^2+5j)/2+3,\ (j^2+5j)/2+4\}$$

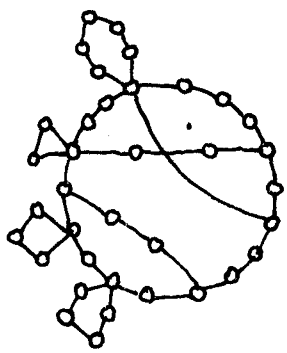
综合 $k=1,2$ 的情形，只须考虑下列两种情况.

情况1　$n=(j^2+5j)/2+2$ 且 $9\leq n<129$．由于 G 的含圈数 $m(G)\geq(j^2+5j)/2$ 且 G 是简单MCD图，因此 G 的含圈数 $m(G)=(j^2+5j)/2$，于是 G 是唯一泛圈图．设 C 是 G 的Hamilton圈，则易证 C 的内部恰有一对交叉弦．根据［4］中定理4，$\{G\in(G_{14}^{(i)}|\, i=1,2,3)\}$，$G_{14}^{(i)}$ 是具有14个顶点的唯一泛圈图．故 $n=14$，矛盾．

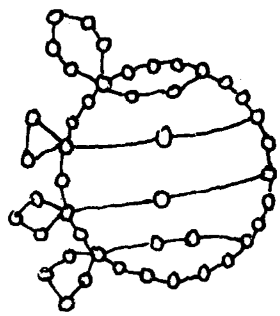
情况2　$n\in\{(j^2+5j)/2+3,\ (j^2+5j)/2+4\}$ 且 $9\leq n<46$．由于 $2\leq j\leq 7$，推出 $n\in\{10, 11, 15, 16, 21, 22, 28, 29, 36, 37, 45\}$．通过对28个顶点的含同胚于 K_4 的子图的2连通简单图分许多情况进行详细讨论，可以证明这样的图均不是简单MCD图（具体证明将在另文中给出），而对 $n=29, 36, 37, 45$，均可以作出一个有 n 个顶点和 $n+1+[(\sqrt{8n-15}-3)/2]$ 条边的简单CD图（见图1，这些图分别用 $G_{29}, G_{36}, G_{37}, G_{45}$ 表示，由于 G_{37} 是以 G_{36} 添加一条悬挂边得到，故 G_{37} 未画出），于是对 $n=29, 36, 37, 45$ 有 $f^*(n)\geq n+1+[(\sqrt{8n-15}-3)/2]$，这与定理C矛盾．因此 $n\notin\{28, 29, 36, 37, 45\}$．这样 $n\in\{10, 11, 15, 16, 21, 22\}$，矛盾．■



G_{29}



G_{36}



G_{45}

参 考 文 献

［1］Shi Yongbing (施永兵), On Maximum Cyde-Distributed Graphs, Discrete Math. 71(1988), 57—71.

［2］施永兵，圈长唯一的最大图的边数，科学通报，33(1988) 10: 795—796.

［3］Bondy, J. A.; Murty, U. S. R., Graph Theory with Applications, Macmillan Press, 1976, 247.

［4］施永兵，关于唯一泛圈图的进一步结果（一），（二），上海师范大学学报（自然科学版），2(1986)，20—27．4(1986)，1—7.

Some Theorems on Simple MCD-Graphs

Shi Yongbing

(Dept. Math. Shanghai Teachers' University, Shanghai)

Abstract

A graph G is said to be a simple cycle-distributed graph if G is a simple graph in which no two cycles have the same length. A graph G is said to be a simple maximum cycle-distributed graph (simple MCD-graph) if G is a simple cycle-distributed graph on n vertices which has the maximum possible number of edges. In this paper, we prove that (1) None of 2-connected non-planar graphs is a simple MCD-graph; (2) For each positive integer $n \notin \{10, 11, 14, 15, 16, 21, 22\}$, there does not exist a simple MCD-graph on n verticas such that it is a 2-connected graph containing a subgraph homeomorphic to K_4.