第11卷 第4期 数学研究与评论 Vol.11 No.4
1991年11月 JOURNAL OF MATHEMTTICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 1991

$\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$上幂零指数为3且平方同构于$N_p\oplus N_p$的2秩代数

赵 嗣 元
(上海师范大学数学系)

摘 要

本文把这种代数的同构分类问题归结为素域$F_p=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$上2阶一般线性群$GL(2,F_p)$作用于$M_{4,2}(F_p)$的2秩阵子集$M_p$上的轨道条数$r(p)$的求法问题，并以$p=2,3$为例具体给出$r(2)=42$，$r(3)=149$.

I 概 述

环$\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$上幂零指数为3且平方同构于$N_p\oplus N_p$(N_p表p元零乘环)的2秩代数是有下列三个性质的(结合)环N：

(i) 加群$(N,+)$是(p^2,p^2)型交换群(从而N是p^4阶的)；

(ii) $N\supsetneqq N^2\supsetneqq N^3=0$(从而乘法满足结合律)；

(iii) (理想) $N^2\cong N_p\oplus N_p$.

反之有这三个性质(i)、(ii)、(iii)的环N是$\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$上幂零元指数为3且平方同构于$N_p\oplus N_p$的2秩代数.

加群(p^2,p^2)型的p^4阶结合环的同构分类就只差这种环的类数$r(p)$尚未决定[1].本文给出转化

定理 $r(p)$等于集$M_p=\{M\in M_{4,2}(F_p)\mid rk(M)=2\}$在群$G=GL(2,F_p)$的作用

$$(g,M)\mapsto g(M):=(g\otimes g)Mg^{-1}\tag{1.1}$$

之下的轨道条数.这里$g\otimes g$是方阵g与g的张量积.且(1.1)的右端是三个矩阵之积.

II 定 理 的 证 明

$A=\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$是一个有幺交换环，设$N$为有性质(i)、(ii)、(iii)的任 环，则$(N,+)$是2秩的自由$A$-模，以$(u,v)$表其一基，即$(N,+)=(u)\dotplus(v)$.这里$\dotplus$表加群的直和，$(u)$、$(v)$依次表由$u,v$生成的$p^2$阶循环子群.$(N,+)$也是一个$\mathbf{Z}$-模，但非自由模，$(u,v)$是一个极小生成系，有零化理想$\mathrm{Ann}(u)=\mathrm{Ann}(v)=p^2\mathbf{Z}$.令$P_2=\{0,1,2,\cdots,p^2-1\}$，$P=P_1=\{0,1,\cdots,p-1\}$.则$P_1\subset P_2\subset\mathbf{Z}$，$(N,+)=\{\xi u+\eta v|\xi,\eta\in P_2\}$，$pN=\{\xi pu+\eta pv|\xi,\eta\in P\}$，$(N,+)$内$p$阶元全体是$pN-\{0\}$恰含$p^2-1$个元，$(N,+)$内$p^2$阶元全体是$N-pN=\{\xi u+\eta v|\xi,\eta\in P_2,(\xi,p^2)=1$或$(\eta,p^2)=1\}$.

* 1989年12月19日收到.

由(iii)知N^2的非零元都是p阶的，故 $N^2=pN=(pu)\oplus(pv)$. 这里$\oplus$表环的直和. 因$\{u^2, uv, vu, v^2\}\subset N^2$，故决定$N$结构的$(u,v)$的乘法表如下：

$$\begin{bmatrix} u^2 \\ uv \\ vu \\ v^2 \end{bmatrix} = M\begin{pmatrix} pu \\ pv \end{pmatrix}, \quad M\in M_{4,2}(P),\ rk(M)=2. \tag{2.1}$$

因$N^3=0$, 故N^2是N的零化理想，乘法结合律对结构常数阵M毫无约束，但乘法表(2.1)并无p^8个，盖$rk(M)=2$也. N^2可视为域F_p上2维代数(N可不能看作F_p上代数)，故可认为结构常数阵$M\in M_{4,2}(F_p)$，结构常数阵全体$M_p\subset M_{4,2}(F_p)$. 于是$|M_p|=(p^4-1)(p^4-p)$，是为乘法表(2.1)的个数. 此数并非$r(p)$. 因为同一环的不同生成系的乘法表可以不同，不同乘法表所确定的环可以同构，因此$r(p)\leq|M_p|$. 我们必须考察生成系变换时乘法表或结构常数阵如何变化. $(N, +)$的生成系变换如下：

$$u'=a_{11}u+a_{12}v,\ v'=a_{21}u+a_{22}v,\ a_{ij}\in P_2,\ a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p^2) \tag{2.2}$$

这导出N^2的基变换：

$$pu'=\dot{a}_{11}pu+\dot{a}_{12}pv,\quad pv'=\dot{a}_{21}pu+\dot{a}_{22}pv \tag{2.3}$$

这里$\dot{a}_{ij}=a_{ij}+p\mathbf{Z}\in F_p$. 若 $u''=\beta_{11}u+\beta_{12}v$, $v''=\beta_{21}u+\beta_{22}v$为$N$之另一生成系则

$$(pu', pv')=(pu'', pv'')\Leftrightarrow a_{ij}\equiv\beta_{ij}\ (\mathrm{mod}\ p)\qquad (i, j=1,2)$$

容易验证下二引理

引理1 设$(N, +)$的二个生成系(u, v), (u', v')的结构常数阵分别为M与M'，二系由(2.2)变换，则

$$M'=((a_{ij})\otimes(a_{ij}))M(a_{ij})^{-1} \tag{2.4}$$

引理2 $a_{ij}\equiv\beta_{ij}(\mathrm{mod}\ p)$ $(i, j=1,2)$时，对$\forall M\in M_p$皆有

$$((\dot{a}_{ij})\otimes(\dot{a}_{ij}))M(\dot{a}_{ij})^{-1}=((\dot{\beta}_{ij})\otimes(\dot{\beta}_{ij}))M(\dot{\beta}_{ij})^{-1}.$$

证明均从略. 由此可见N中给出N^2同一基的生成系的乘法表或结构常数阵相同. N^2中基变换与$GL(2, F_p)$的元有双射对应. 故可认为(2.2)中$a_{ij}\in F_p$. N的生成系变换或N^2的基变换所导出的结构常数阵的变换正是群$G=GL(2, F_p)$在集M_p上的作用[2].

$$(g, M)\mapsto g(M)=(g\otimes g)Mg^{-1} \tag{2.5}$$

这是因为

$$\begin{aligned} g_1(g_2(M)) &= (g_1\otimes g_1)(g_2(M))g_1^{-1}=(g_1\otimes g_1)((g_2\otimes g_2)Mg_2^{-1})g_1^{-1} \\ &= ((g_1\otimes g_1)(g_2\otimes g_2))M(g_2^{-1}g_1^{-1})=(g_1g_2\otimes g_1g_2)M(g_1g_2)^{-1}=(g_1g_2)(M) \end{aligned}$$

且$\mathbf{1}(M)=M$之故.

易证：只要$g(M_i)=M_i$ $(i=1,2)$且M_1, M_2的四个列向量(在F_p上)线性无关，就有

$$g=\mathbf{1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

在群G如此作用下的集M_p被划分成轨道之并：$M_p=O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_{r(p)}$，在同一轨道的诸阵所对应的乘法表所确定的环是同构的；属不同轨道的二阵所对应的乘法表所确定的二环不同构. 因此轨道的条数恰为具有性质(i)、(ii)、(iii)的环的同构类数$r(p)$. 于是这种环的同构分类问题转化为求集M_p在群G的作用(2.5)之下的轨道条数问题. ■

Ⅲ　轨道条数的探求

1° M_p的每一点M有稳定子群$\mathrm{Stab}(M)=\{g\in G|g(M)=M\}\supseteq(1)$；对 $\forall g\in G$，$M\in M_p$，有 $\mathrm{Stab}(g(M))=g(\mathrm{Stab}(M))g^{-1}$；若 M_i 是轨道 O_i 上一点，则 $|O_i|=[G:\mathrm{Stab}(M_i)]\leq|G|=(p^2-1)(p^2-p)$，且 $|O_i|\,\big|\,|G|$。

要是 M_p 内每一点的稳定子群都是 (1)，那么所有轨道均含$|G|$个点，乃将有 $r(p)=|M_p|/|G|=(p^2+1)(p^2+p+1)$。可事实并非如此简单，$M_p$内存在稳定子群$\supset(1)$的点，从而此点所在的轨道的点数$<|G|$，致使条数 $r(p)>(p^2+1)(p^2+p+1)$。

2° 对$g\in G$，可考虑 g 的不动点集 $F_g=\{M\in M_p|g(M)=M\}$。但它可能是空集，例如$p>2$，$g=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-\mathrm{I}$时，对 $\forall M\in M_p$，有 $g(M)=-M\neq M$，即G中非 I 中心元均无不动点，因此每条轨道至少含$|F_p^*|=p-1$个点，所以 $r(p)\leq\dfrac{|M_p|}{p-1}=p(p^2+p+1)(p^4-1)$。

3° 若 $\mathrm{I}\neq g\in\mathrm{Stab}(M)$，则 $M\in F_g$。因此欲找$\mathrm{Stab}(M)\supset(\mathrm{I})$的点$M$，可先找$G$内有不动点的元 g(盖$|G|\ll|M_p|$也)，堪充 M_p 内某点的稳定子群的子群必不空非 I 中心元，尤当先找出它们。

4° G的循环子群(g)的不动点集 $F_{(g)}=F_g$。这里子群H的不动点集定义为 $F_H=\bigcap\limits_{h\in H}F_h$。故若$\{h_1,\cdots,h_s\}$为$H$之一极小生成系，则 $F_H=\bigcap\limits_{j=1}^{s}F_{h_j}$。特别地 $F_{g_1}\cap F_{g_2}=F_{(g_1,g_2)}$其中$(g_1,g_2)$表由子集$\{g_1,g_2\}$生成的子群。故欲找不空非 I 中心元的子群，可先找出不空非 1 中心元的循环子群。

5° 对 $\forall g$，$h\in G$，有 $F_{hgh^{-1}}=h(F_g)$，故互相共轭的循环子群的不动点集分属相同的那些轨道。故可把不含非 I 中心元的诸循环子群按共轭分类，每类选一代表，诸代表的不动点集之并U所躺的诸轨道皆不满$|G|$个点，其它轨道均含$|G|$个点。

6° 对 $\forall g\in N_G(H)$，有 $g(F_H)=F_H$，故与 F_H的点同轨的点可以用 $N_G(H)$ 在G内的其余陪集的代表作用于 F_H的诸点去找出。

7° F_g 中各点的稳定子群未必相同，但都含 g。

兹以 $p=2$ 及 3 为例先求取 $r(2)$ 及 $r(3)$。

Ⅳ　$r(2)$ 及 $r(3)$

1° $p=2$时，$F_2=\{0,1\}$，$F_2^*=\{1\}$，$G=GL(2,F_2)\cong S_3$，中心$Z(G)=\{\mathrm{I}\}$，每个阶大于1的循环子群都是不含非 I 中心元的：3阶的是唯一的(a)，其中 $a=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$；2阶的有三个：$(b_i)$ $(i=1,2,3)$ 这里 $b_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$b_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$b_3=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ 是互相共轭的：$b_1b_2b_1^{-1}=b_3$，$b_3b_2b_3^{-1}=b_1$。我们只取 b_2，易见

$$F_a=\left[\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&0\\1&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\right]$$

$$F_{b_2}=\left[\begin{bmatrix}\sigma+\tau_{12}+\tau_{21}&\tau_{11}\\\sigma&\tau_{12}\\\sigma&\tau_{21}\\0&\sigma\end{bmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}\sigma,\tau_{ij}\in F_2\\rk=2\end{matrix}\right].$$

易见 $|F_{b_2}|=12$．由 $\{M_1\}=\left[\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\right]=F_a\cap F_{b_2}=F_{(a,b_2)}=F_G$，因为 $(a,b_2)=G$）可知 M_1 是 G 的不动点，故单点集 $O_1=\{M_1\}$ 就是一条轨道．其次易见 F_a-O_1 的两个点的稳定子群都是 (a)．因 $(a)<G$，即 $N_G((a))=G$，据 Ⅲ 6°知 F_a-O_1 的点所属之轨道被包含在 F_a-O_1 里．(a) 的另一陪集的代表使 F_a-O_1 中两点互变．因此这两点组成一条轨道 $O_2=F_a-O_1$． 再看 $F_{b_2}-O_1$ 中11个点的稳定子群都是 (b_2)，它是自正规的，即 $N_G((b_2))=(b_2)$．$[G:(b_2)]=3$．(b_2) 的另二个陪集代表 b_1 与 b_3 把 $F_{b_2}-O_1$ 变为 $b_1(F_{b_2}-O_1)=F_{b_3}-O_1$，$b_3(F_{b_2}-O_1)=F_{b_1}-O_1$．这三个11元集互不相交，其并集分属11条轨道，每轨三点．

至此有稳定子群 $\supset(1)$ 的点都已找出．它们组成 $1+1+11=13$ 条轨道，共含 $1+2\times1+3\times11=36$ 个点．M_p 中其余的 $210-36=174$ 个点的稳定子群都是 (1)，从而所属轨道均含 6 个点，故分属 $174\div6=29$ 条轨道，四种轨道总共是 $13+29=42$ 条，即 $r(2)=42$．

2° $p=3$ 时，$F_3=\{0,1,-1\}$，$F_3^*=\{1,-1\}=(-1)$，$|GL(2,F_3)|=48$，$|M_p|=6240$．$(3^2+1)(3^2+3+1)=130\leq r(3)$，$G=GL(2,F_3)$ 的中心 $Z(G)=\{\mathbf{I},-\mathbf{I}\}$．$G$ 内不含 $-\mathbf{I}$ 的循环子群有二种[3]．

$GL(2,F_3$ 的48个元按阶分布如下：

1 阶元一个： $\mathbf{I}$		
2 阶元十三个： $-\mathbf{I}$ 及 $\pm b_t$，$t=1,2,\cdots6$,．		
4 阶元六个：	$\pm i$，$\pm j$，$\pm k$	平方皆为 $-\mathbf{I}$
8 阶元十二个（每个 4 阶元有二个平方根）		4 次幂皆为 $-\mathbf{I}$
3 阶元八个：	a_s, a_s^{-1}，$s=1,2,3,4$．	
6 阶元八个：	$-a_s$，$-a_s^{-1}$，$s=1,2,3,4$．	3 次幂皆为 $-\mathbf{I}$

合计48个．

不含非 $\mathbf{I}$ 中心元的循环子群只有 $\begin{cases}2\text{ 阶子群十二个：}(b_t),(-b_t),\ t=1,2,\cdots,6\\3\text{ 阶子群四个：}(a_s),s=1,2,3,4\end{cases}$

M_p 内稳定子群 $\supset(1)$ 的点尽在这16个元的不动点集的并中，也全在过 $F_{a_1}\cup F_{-b_4}$ 的点的诸轨道内，易见

$$F_{a_1}=\left[\begin{bmatrix}\tau_{12}+\tau_{21}&\tau_{11}\\0&\tau_{11}\\0&\tau_{21}\\0&0\end{bmatrix}\middle|\begin{matrix}\tau_{ij}\in F_3\\\tau_{12}+\tau_{21}\neq0\end{matrix}\right],\quad |F_{a_1}|=p^2(p-1)=18.$$

$$F_{-b_4}=\left[\begin{bmatrix}\sigma_{11}&0\\0&\tau_{12}\\0&\tau_{21}\\\sigma_{22}&0\end{bmatrix}\middle|\begin{matrix}\sigma_{ij},\tau_{ij}\in F_3\\(\sigma_{11},\sigma_{22})\neq(0,0)\neq(\tau_{12},\tau_{21})\end{matrix}\right],\quad |F_{-b_4}|=(p^2-1)^2=64.$$

F_{a_1} 内各点的稳定子群未必相同，F_{-b_4} 的点亦然．可划分

$$F_{a_1}\cup F_{-b_4}=(F_{a_1}\cap F_{-b_4})\dot\cup(F_{a_1}-F_{-b_4})\dot\cup(F_{-b_4}-F_{a_1})$$

这里$\dot{U}$表不相交的并．这三部分的每一个里各点的稳定子群相同了，这是容易验证的．先看

$$F_{(a_1,-b_4)}=F_{a_1}\cap F_{-b_4}=\left[\begin{bmatrix}\tau_{12}+\tau_{21} & 0\\ 0 & \tau_{12}\\ 0 & \tau_{21}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\middle|\begin{matrix}\tau_{ij}\in F_3\\ \tau_{12}+\tau_{21}\neq 0\end{matrix}\right],\quad |F_{(a_1,-b_4)}|=p(p-1)=6.$$

其中每点的稳定子群都是下面的6阶非交换子群：$(a_1,-b_2)=(a_1,-b_4)=(a_1,b_6)=\{\begin{pmatrix}1&\beta\\0&\delta\end{pmatrix}\mid\beta\in F_3,\delta\in F_3^*\}\ (\cong D_6\cong S_3)$，证略．

从而所属的轨道含$48\div 6=8$个点．$F_{(a_1,-b_4)}$的6个点至多属三条轨道，盖其含M时亦必含$-M$，而M与$-M$同轨．因$(a_1,-b_4)$的正规化子$N_G((a_1,-b_4))=\{\begin{pmatrix}a&\beta\\0&\delta\end{pmatrix}\mid\beta\in F_3,a,\delta\in F_3^*\}$是12阶子群，它在$G$内的指数为4，四个陪集代表把$F_{(a_1,-b_4)}$变为$F_{(a_1,-b_4)}$，$F_{(a_2,b_4)}$，$F_{(a_3,b_1)}$，$F_{(a_4,-b_1)}$，这四个6元集之并（含24个点）划分成三条轨道，各含8个点．其次考虑

$$F_{a_1}-F_{-b_4}=\left[\begin{bmatrix}\tau_{12}+\tau_{21} & \tau_{11}\\ 0 & \tau_{12}\\ 0 & \tau_{21}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\middle|\begin{matrix}\tau_{ij}\in F_3\\ \tau_{12}+\tau_{21}\neq 0\neq\tau_{11}\end{matrix}\right],\quad |F_{a_1}-F_{-b_4}|=p(p-1)^2=12.$$

其中12个点至多属六条轨道．可证其中每点的稳定子群都是3阶的(a_1)，（证略）从而所属轨道含$48\div 3=16$个点，由于$N_G((a_1))=N_G((a_1,-b_4))$是12阶的，在$G$内指数为4，而四个陪集代表把$F_{a_1}-F_{-b_4}$变为$F_{a_1}-F_{-b_4}$，$F_{a_2}-F_{b_4}$，$F_{a_3}-F_{b_1}$，$F_{a_4}-F_{-b_1}$．这四个12元集之并（含48个点）划分成三条轨道各含16个点：再考虑$F_{b_4}-F_{a_1}$，它含$(p^2-1)^2-p(p-1)=64-6=58$个点，至多属29条轨道．

引理 $F_{-b_4}-F_{a_1}$内每点的稳定子群都是$(-b_4)$．

证明 对$F_{-b_4}-F_{a_1}=\left[\begin{bmatrix}\sigma_{11} & 0\\ 0 & \tau_{12}\\ 0 & \tau_{21}\\ \sigma_{22} & 0\end{bmatrix}\middle|\begin{matrix}\sigma_{ij},\tau_{ij}\in F_3\\ (\sigma_{11},\sigma_{22})\neq(0,0)\neq(\tau_{12},\tau_{21})\\ \tau_{12}+\tau_{21}\neq\sigma_{11}\end{matrix}\right]$的任一点$M$来说，若

$g=\begin{pmatrix}a&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\in\mathrm{Stad}(M)\subset G$，则$(g\otimes g)M=Mg$即

$$\begin{bmatrix}a^2 & a\beta & \beta a & \beta^2\\ a\gamma & a\delta & \beta\gamma & \beta\delta\\ \gamma a & a\delta & \delta\gamma & \delta\beta\\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta\gamma & \delta^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{11} & 0\\ 0 & \tau_{12}\\ 0 & \tau_{21}\\ \sigma_{22} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & 0\\ 0 & \tau_{12}\\ 0 & \tau_{21}\\ \sigma_{22} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$$

亦即

$$a^2\sigma_{11}+\beta^2\sigma_{22}=a\sigma_{11}\quad(4.1)\qquad a\beta(\tau_{12}+\tau_{21})=\beta\sigma_{11}\quad(4.5)$$
$$a\gamma\sigma_{11}+\beta\delta\sigma_{22}=\gamma\tau_{12}\quad(4.2)\qquad a\delta\tau_{12}+\beta\gamma\tau_{21}=\delta\tau_{12}\quad(4.6)$$
$$\gamma a\sigma_{11}+\delta\beta\sigma_{22}=\gamma\tau_{21}\quad(4.3)\qquad \gamma\delta\tau_{12}+\delta a\tau_{21}=\delta\tau_{21}\quad(4.7)$$
$$\gamma^2\sigma_{11}+\delta^2\sigma_{22}=a\sigma_{22}\quad(4.4)\qquad \gamma\delta(\tau_{12}+\tau_{21})=\beta\sigma_{22}\quad(4.8)$$

由（4.2）及（4.3）得 $\gamma(\tau_{12}-\tau_{21})=0$

先证$\gamma=0$，运用反证法，假定不然而有$\gamma\neq0$，则$\tau_{12}=\tau_{21}$，因为$(\tau_{12},\tau_{21})\neq(0,0)$，所以$\tau_{12}=\tau_{21}\neq0$。乃由（4.6）得$\delta=a\delta+\beta\gamma$。由此及$0\neq\det(g)=a\delta-\beta\gamma$推出$\delta\neq0$。又由（4.5）及（4.8）得$a\beta\sigma_{22}=\dfrac{\beta\sigma_{11}\sigma_{22}}{\tau_{12}+\tau_{21}}=\gamma\delta\sigma_{11}\Rightarrow\sigma_{11}=\dfrac{a\beta}{\gamma\delta}\sigma_{22}$，由此及$(\sigma_{11},\sigma_{22})\neq(0,0)$推出$\sigma_{22}\neq0$，又由（4.4）得$\sigma_{11}=\dfrac{a-\delta^2}{\gamma^2}\sigma_{22}$，于是有$\dfrac{a\beta}{\gamma\delta}=\dfrac{a-\delta^2}{\gamma^2}\Rightarrow a\beta\gamma=a\delta-\delta^3$，另一方面由$\delta=a\delta+\beta\gamma$推出$a\beta\gamma=a\delta-a^2\delta$故有$a\delta-\delta^3=a\delta-a^2\delta$，即$\delta(\delta^2-a^2)=0$。即$\delta\neq0$，必$a^2=\delta^2$。再由（4.8）得$\beta\sigma_{22}=2\gamma\delta\tau_{12}\neq0\Rightarrow\beta\neq0$。于是（4.5）二端$\beta$可消去得$\sigma_{11}=2a\tau_{12}$，因$\sigma_{11}\neq\tau_{12}+\tau_{21}=2\tau_{12}$，故$a\neq1$。把$\sigma_{11}=\dfrac{a\beta}{\gamma\delta}\sigma_{22}$代入（4.2）得$\gamma\tau_{12}=(a\gamma\dfrac{a\beta}{\gamma\delta}+\beta\delta)\sigma_{22}=\dfrac{\beta}{\delta}(a^2+\delta^2)\sigma_{22}=2\beta\delta\sigma_{22}$ 与$2\gamma\delta\tau_{12}=\beta\sigma_{22}$一起消去$\tau_{12}$与$\sigma_{22}$得$4\delta^2=1$即$4a^2-1=0$，$(2a-1)(2a+1)=0$。但从$\delta=a\delta+\beta\gamma$及$a\delta-\beta\gamma\neq0$得$a\delta-\beta\gamma=a\delta-\delta+a\delta=\delta(2a-1)\neq0$，故必$2a+1=0$。即$a=1$（因$p=3$）这与已得之$a\neq1$相矛盾。因此假定$\gamma\neq0$是错的，应为$\gamma=0$，乃由（4.6）及（4.7）得$(a-1)\delta\tau_{12}=0=(a-1)\delta\tau_{21}$乃由$(\tau_{12},\tau_{21})\neq(0,0)$及$0\neq\det(g)=a\delta$推出$a=1$。代入（4.5），因$\sigma_{11}\neq\tau_{12}+\tau_{21}$故$\beta=0$，于是$g=\begin{pmatrix}1&0\\0&\delta\end{pmatrix}\in(-b_4)$。 ■

据此引理知$F_{-b_4}-F_{a_1}$中每点所属之轨道含24个点。因$(-b_4)$的正规化子$N_G((-b_4))=(-b_4)\times(b_4)=\{\pm1,\pm b_4\}$是4阶的，在$G$内指数是12。它的十二个陪集代表把$F_{-b_4}-F_{a_1}$变为互不相交的12个58元集：

$$b_{-4}(F_{-b_4}-F_{a_1})=F_{-b_4}-F_{a_1},\quad b_1(F_{-b_4}-F_{a_1})=F_{b_4}-F_{a_2},\quad b_3(F_{-b_4}-F_{a_1})=F_{-b_5}-F_{a_3},$$

$$b_5(F_{-b_4}-F_{a_1})=F_{b_3}-F_{a_4},\quad b_2(F_{-b_4}-F_{a_1})=F_{b_6}-F_{a_1},\quad b_6(F_{-b_4}-F_{a_1})=F_{-b_2}-F_{a_1},$$

$$\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}(F_{-b_4}-F_{a_1})=F_{b_1}-F_{a_3},\quad \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}(F_{-b_4}-F_{a_1})=F_{-b_1}-F_{a_4},\quad \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(F_{-b_4}-F_{a_1})=F_{-b_6}-F_{a_3},$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}(F_{-b_4}-F_{a_1})=F_{-b_3}-F_{a_2},\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(F_{-b_4}-F_{a_1})=F_{b_5}-F_{a_2},\quad \begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}(F_{-b_4}-F_{a_1})=F_{b_2}-F_{a_4}.$$

这12个58点集之并（含696个点）划分成29条轨道，每条含24个点。

至此获得三种轨道共$3+3+29=35$条。含有点$8\times3+16\times3+24\times29=24+48+696=768$个。$M_p$中剩下的$6240-768=5472$个点的稳定子群都是(1)，所属轨道各含$|G|=48$个点。划分成$5472\div48=114$条轨道，于是

$$r(3)=3+3+29+114=149.$$

即$p=3$时具有性质(i)、(ii)、(iii)的环恰有149个同构类。

参考文献

[1] 赵嗣元"加群为(p^2,p^2)型的p^4阶结合环的同构分类"1989，待发表。

[2] N. Jacobson, Basic Algebra I. 1974. p. 70.

[3] 赵嗣元"$GL(2,F_3)$的所有子群"，1989，已投《上海师大学报》，待发表。

The Algebras of 2 rank over Z/p^2Z with nilpotent index 3 and it's square isomorphic to $N_p \oplus N_p$

Zhao SiYuan

(Shanghai Normal University)

This paper reduces the classification problem of those algebras mentioned in subject to find the number of orbits of 2 rank matrices of $M_{4,2}(F_p)$ which is operated by $GL(2, F_p)$ under a special operation, and taking $p=2.3$ for example, gives $r(2)=42$, $r(3)=149$ concretely.