第11卷 第4期 数学研究与评论 Vol.11 No.4
1991年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 1991

Golan第19问题的推广*

邓 培 民

（广西师范大学数学系，桂林）

摘 要

本文讨论了比Golan第19问题更一般的情况，即当环R和S之间存在满（epimorphism）同态φ时，何时有映上映射$\varphi_{\#}$：R-tors→s-tors存在，得到了一些结果，而Golan第19问题的解决是此结果的推论．

J.S.Golan的《关于挠理论的30个公开问题》[1]中的第19个问题是：若在环R和S之间存在着一个映上（sujection）同态φ，那么是否有R-tors到S-tors的映上映射$\varphi_{\#}$存在？他猜测上述情况只能在弱正则环（weakly reagular ring）时才成立．此问题于1988年得到解决[2]，结果是：对任意有单位元的结合环R和S，只要存在映上同态φ：$R\to S$则一定存在映上映射$\varphi_{\#}$：R-tors→S-tors．

我们知道，在环范畴中，映上同态一定是满同态（Epimorphism），反之则不一定成立．而在环论的研究中，常出现两个环之间存在着一个满同态的情况，例如环R和它的关于Gabriel拓扑$\mathfrak{J}$的商环$R_{\mathfrak{J}}$之间的自然同态中：$R\to R_{\mathfrak{J}}$就常常是满同态，所以将Golan第19问题进行推广是有必要的，下面我们就来讨论：若在环R和S之间存在着一个满同态，那么何时有R-tors到S-tors的满射（这里亦即映上映射）存在？

设环R是有单位元的结合环，R的左理想集$\mathfrak{J}$满足：1.若$I,J\leq R$，$I\in\mathfrak{J}$，$J\geq I$，则$J\in\mathfrak{J}$；2.若$I,J\in\mathfrak{J}$，则$I\cap J\in\mathfrak{J}$；3.若$I\in\mathfrak{J}$，则对$\forall a\in R$，$(I:a)=\{r\in R|ar\in I\}\in\mathfrak{J}$；4.若$I\leq R$，$J\in\mathfrak{J}$，并使得$(I:b)\in\mathfrak{J}$，对$\forall b\in J$，则$I\in\mathfrak{J}$，那么就称$\mathfrak{J}$为环$R$的一个左Gabriel拓扑．内射左$R$-模的一个等价类$\tau$称为$R$-Mod的一个遗传挠论，这里的两个内射模等价的充要条件是它们可互相嵌入到对方的直积中[3]，所有R-Mod上的遗传挠论组成的集合记作R-tors．R-Mod上的遗传挠论与R的Gabriel拓扑存在着一一对应关系[4]．设$\tau\in R$-tors，它所对应的R的Gabriel拓扑为$\mathfrak{J}$，一个左R-模M称为是τ-torsion（也称为$\mathfrak{J}$-torsion）的充要条件是：$\mathrm{Hom}_R(M.E)=0$，对某个$E\in\tau$，我们也说内射模E余生成τ．任一个遗传挠论都可由一个内射模余生成〔4.V1,prop3.7〕，任一个内射模也可余生成一个遗传挠论．一个左R-模M是τ-torsion free（也称为$\mathfrak{J}$-torsion free）的充要条件是M可嵌入到E的直积中〔4,V1.prop 3.9〕．

若有环同态φ：$R\to S$，我们定义$rs=\varphi(r)s$，对$\forall r\in R$，$s\in S$，则S可成为左R-模．同样

* 1989年11月6日收到．

地，S 也可成为右 R-模．设 M 是一个左 S-模，我们定义 $rm=\varphi(r)m$，对 $\forall m\in M$，$r\in R$，则 M 可成为左 R-模，并有函子 φ^*：R-Mod$\to S$-Mod 和 φ_*：S-Mod$\to R$-Mod，其中 $\varphi^*(M)=S\otimes_R M$，$\varphi_*({}_S N)={}_R N$，并且 φ^* 是 φ_* 的左转置．当 φ 为满同态时，φ_*：S-Mod$\to R$-Mod 是全的〔4, XI, prop 1.2〕，从而对 $\forall {}_S M$，${}_S N$，$\mathrm{Hom}_S(M.N)=\mathrm{Hom}_R(M.N)$，且 S-Mod 等价于 R-Mod 的一个全子范畴 $\mathscr{C}=\{{}_R M|M$ 是 S-模$\}$，这时有等价函子 $\mathscr{C}\underset{\varphi_*}{\overset{\varphi^*}{\rightleftarrows}}S$-Mod．

引理 1 若有满同态 φ：$R\to S$，则 $\mathscr{C}=\{{}_R M|M$ 是 S-模$\}=\mathrm{Gen}({}_R S)$．$\mathrm{Gen}({}_R S)$ 表示由 ${}_R S$ 生成的 R-Mod 的子范畴．

证明 因为 ${}_R S\in\mathscr{C}$，所以 $\mathrm{Gen}({}_R S)\subseteq\mathscr{C}$；反之，设 ${}_R M\in\mathscr{C}$，那么 $\varphi^*(M)=S\otimes_R M\cong{}_S M\in S$-Mod，所以有 ${}_S S^{(A)}\to{}_S M\to 0$ 正合，又有 $\varphi_*(S^{(A)})\to\varphi_*(M)\to 0$ 正合，即 ${}_R S^{(A)}\to{}_R M\to 0$ 正合，从而 ${}_R M\in\mathrm{Gen}({}_R S)$，故 $\mathscr{C}=\mathrm{Gen}({}_R S)$．

定理 2 设 φ：$R\to S$ 是满同态，若 R-Mod 的全子范畴 $\mathscr{C}=\{{}_R M|M$ 是 S-模$\}$ 关于子模封闭，则 R-tors 与 S-tors 之间存在着一个满射 φ_*．

证明 这时 $\mathscr{C}\underset{\varphi_*}{\overset{\varphi^*}{\rightleftarrows}}S$-Mod 是等价的．设 $\tau\in R$-tors，令 $\varphi_*(\tau)\in S$-tors，这里 S-模 M 是 $\varphi_\#(\tau)$-torsion 的充分必要条件是 R-模 M 是 τ-torsion．那么令 $\varphi_\#$：$\tau\mapsto\varphi_\#(\tau)$ 是 R-tors 到 S-tors 的映射．我们证明 $\varphi_\#$ 是满的．对 $\forall\sigma\in S$-tors，那么 σ 可由内射模 ${}_S E$ 余生成，并有 ${}_S M$ 是 σ-torsion 的充要条件是 $\mathrm{Hom}_S(\mathrm{M.E})=0$．

E 可以作为 R-模，但 ${}_R E$ 不一定内射，令 ${}_R\widetilde{E}$ 表示 ${}_R E$ 的内射包，设 ${}_R\widetilde{E}$ 余生成的遗传挠论为为 $\tau\in R$-tors，则一定有 $\varphi_\#(\tau)=\sigma$ 成立，因为，若有 S-模 M，且 ${}_S M$ 是 σ-torsion，那么就有 $\mathrm{Hom}_S(M, E)=0$，又由于 σ 是遗传的，所以对 ${}_S M$ 的任意 S-子模 N，也有 $\mathrm{Hom}_S(N, E)=0$，现证明 $\mathrm{Hom}_R(M, \widetilde{E})=0$ 一定也成立，从而可得 ${}_R M$ 是 τ-torsion．我们有结论：若 L，M 是两个模，则 $\mathrm{Hom}(L, E(M))=0$ 的充分必要条件是 $\mathrm{Hom}(C, M)=0$，对 L 的每个循环子模 e[4]，所以只要证明 $\mathrm{Hom}_R(C, E)=0$，其中 C 为 ${}_R M$ 的任意子模．设 N 是 ${}_R M$ 的任意子模，${}_R M\in\mathscr{C}$，由于 $\mathscr{C}$ 关于子模封闭，所以 ${}_R N\in\mathscr{C}$，从而 N 也是 S-模，即 N 也是 M 的 S-子模，所以 $\mathrm{Hom}_S(N, E)=0$，而 $\mathrm{Hom}_R(N, E)=\mathrm{Hom}_S(N, E)=0$，得 $\mathrm{Hom}_R(C, E)=0$ 成立，对 ${}_R M$ 的任意循环子模，从而得 $\mathrm{Hom}_R(M, \widetilde{E})=0$，即得 ${}_R M$ 是 τ-torsion，亦有 $\varphi_\#(\tau)=\sigma$，故 $\varphi_\#$ 是满射．

一个模是自生成的，如果它生成它的每一子模．

命题 3 设有映上环同态 φ：$R\to S$，则 S 作为 R-模是自生成的．

证明 设 N 是 ${}_R S$ 的任一子模，由于 φ：$R\to S$ 是映上同态，那么对 $\forall s\in S$，存在 $r\in R$，使得 $\varphi(r)=s$，从而，对 $\forall n\in N$，$s\in S$，由 S 作为 R-模的定义，有 $sn=\varphi(r)n=rn\in{}_R N$．又因为 $S\otimes_R N\in S$-Mod，所以有 $S^{(A)}\xrightarrow{f}S\otimes_R N\to 0$，这里 f 是 S-同态，又有 $S\otimes_R N\xrightarrow{g}N$，其中 $g(s\otimes n)=sn$，由于 $g(r(s\otimes n))=g(rs\otimes n)=rsn$，$rg(s\otimes n)=r(sn)=rsn$，对 $\forall r\in R$，$s\in S$，$n\in N$，得 g 是 R-同态，由于 φ 是映上同态，所以 f 也是 R-同态，从而有 $\overline{f}=gf$：$S^{(A)}\to N$，且 $\overline{f}$ 是 R-同态，又由于 f，g 都是满的，所以 $\overline{f}$ 也是满的，得 ${}_R N$ 可由 ${}_R S$ 生成，故 ${}_R S$ 是自生成的．

定理 4 设有满同态 φ：$R\to S$，如果 S 作为 R-模是自生成的拟投射模，则存在满射 $\varphi_\#$：R-tors$\to S$-tors．

证明 因为 ${}_R S$ 是自生成的拟投射模，从而由〔4, prop 2.2〕可知，$\mathscr{C}=\mathrm{Gen}({}_R S)=\overline{\mathrm{Gen}}({}_R S)$，再由定理 2，得存在满射 $\varphi_\#$：R-tors$\to S$-tors．

我们可以利用以上结论来解决Golan第19问题.

引理5 若 I 是环 R 的任一理想，则 I 是 R 的 $(R, \mathrm{End}_R R)$-子模.

证明 因为 $\mathrm{End}_R R \cong R$，所以对 $\forall r \in R$，$l \in I$，$f \in \mathrm{End}_R R$，有 $(rl)f = (rl)a = r(la) = r(lf)$，对某个 $a \in R$，所以 I 是 R 的 $(R, \mathrm{End}_R R)$-子模.

命题6 若 I 是环 R 的任一理想，则 R/I 作为 R-模是拟投射模. 因此存在满射 $\varphi_{\#}$: R-tors $\to R/I$-tors，其中 φ: $R \to R/I$ 为标准同态.

证明 若有图形

$$\begin{tikzcd} & R/I \arrow[d, "f"] & \\ R/I \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

由于 ${}_RR$ 是投射模，所以存在 R-同态 h：$R \to R/I$，使下图交换

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & R/I \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ R/I \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

其中 i 为典则同态. 由于 I 是 R 的 $(R, \mathrm{End}_R R)$-子模，所以 $(I)h \subseteq I$，从而存在 R-同态 h'：$R/I \to R/I$，使下图交换

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & R/I \arrow[d, "f"] \arrow[dl] & \\ R/I \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

由 $fi = gh = gh'i$，得 $f = gh'$，所以 R/I 作为 R-模是拟投射的. 又由命题3，R/I 作为 R-模是自生成的，

推论 若有映上同态 φ: $R \to S$，则一定有映上映射 $\varphi_{\#}$: R-tors $\to S$-tors.

证明 这时 $S \cong R/I$，I 为 R 的理想，由命题6，得 ${}_RS$ 是拟投射模，再由定理4 和命题3 即可得证.

参 考 文 献

[1] J.S. Golan, Thirtg open problem Concening Torsion Theories, SECRETARIADO DE PUBLICACIONES 1985, 17—17.

[2] 沈大庆，关于Golan的一个问题，科学通报，18(1988), 1373—1374.

[3] J.S. Golan, Torsion Theories, Copublished in the United states with John wileg and Sons. Inc New York 1986.

[4] B. Stenströn, Rings of Quotients spriger-Verlag New York. 1975.

[5] K. R. Fuller, Density and Equivalence, Journal of Algebra 29(1974), 528—550.

Generalization of Golan's 19th Problem

Deng Peiming

(Guangxi Normal University)

Abstract

In this paper we consinder that when the map $\varphi_{\#}$: R-tors $\to S$-tors is suriective for very ring epimorphism φ: $R \to S$? Our results can be used to solve J. S. Golan's 19th problem.