第11卷 第4期 1991年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.4 Nov., 1991

关于剩余类环的整体维数*

杨 静 化

（中国药科大学数学教研室，南京）

本文讨论了剩余类环 R/I 的整体同调维数．在§1中给出了 R/I 是平坦 R—模的一个充要条件；然后在§2中主要证明了：若环 R 不含非零的单侧幂零理想，则

（1）　$\mathrm{LGD}(R/\mathrm{soc}({}_RR))\leq \mathrm{LGD}(R)\leq \mathrm{LGD}(R/\mathrm{soc}({}_RR))+1$；

（2）　$\mathrm{WD}(R/\mathrm{soc}({}_RR))=\mathrm{WD}(R)$．

特别的对本原环和Von-Neumann正则环，上面的结果是成立的．

§1　R/I 的平坦性

引理1.1　设 R 是任意的环，I 是 R 的一个右理想，J 和 L 都是 R 的左理想，且 $J\subset L$，则有

$$R/I\bigotimes_R L/J\cong L/(I\cdot L+J)$$

证明　作一个映射 f，使得

$$f:\quad R/I\times L/J\longrightarrow L/(I\cdot L+J)$$
$$(\bar r,\bar l)\longrightarrow \overline{r\cdot l}$$

显然 f 是一个 R—双加（R-biadditive）映射．于是由张量积的泛性质，存在唯一的同态 h 使得下图可换

$$\begin{tikzcd} R/I\times L/J \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "f"'] & & R/I\bigotimes_R L/J \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & L/(I\cdot L+J) & \end{tikzcd}$$

下面只要证明 h 是一个同构即可．

$\forall a\in R/I\times L/J$，设 $a=\sum_{i=1}^{k}(\bar r_i,\bar l_i)$，则

$$T(a)=\sum_{i=1}^{k}(\bar r_i\otimes\bar l_i)=\bar 1\otimes(\overline{\sum_{i=1}^{k}r_il_i})$$

$$f(a)=\sum_{i=1}^{k}\overline{r_i\cdot l_i}=(\overline{\sum_{i=1}^{k}r_i\cdot l_i})$$

所以 $\forall\bar l\in L/(I\cdot L+J)$，$h(\bar 1\otimes\bar l)=\bar l$．因此 h 是一个满同态．

如果 $\forall\bar l\in L/(I\cdot L+J)$，若 $\bar l=0$，则

* 1989年12月16日收到．

$$l=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i l_i\right)+j\in I\cdot L+J$$

于是$\bar{1}\otimes\bar{l}=0$，即h也是单同态．故h是一个同构．

推论1.2 设R是任意的环，I是R的右理想，J是R的左理想，则

$$R/I\bigotimes_R R/J\cong R/I+J$$

命题1.3 设I是环R的理想，则下面等价：

（1） R/I是一个平坦的右R-模；

（2） $R/I\bigotimes_R L=0$，对一切R的左理想$L\subset I$；

（3） $I\cdot L=L$，对一切R的左理想$L\subset I$．

证明 “(1)⇒(2)” 设R/I是平坦的右R-模，则有$R/I\bigotimes_R L=R/I\cdot L=0$。

“(2)⇒(1)”：先证$R/I\bigotimes_R J=(I+J)/I$，$\forall$左理想$J$都成立．

第一步，假设$I\subset J$，由左R-模的正合列$0\to I\to J\to J/I\to 0$，可得长正合列

$$\cdots\to R/I\bigotimes_R I\to R/I\bigotimes_R J\to R/I\bigotimes_R J/I\to 0$$

由已知$R/I\bigotimes_R I=0$，又根据引理1.1得

$$R/I\bigotimes_R J/I\cong J/(I\cdot J+I)=J/I$$

于是由上面的长正合列可得

$$R/I\bigotimes_R J\cong R/I\bigotimes_R J/I=J/I=(J+I)/I\,.$$

第二步,若$I\not\subset J$,这时$I\subset I+J$，由第一步的证明可得$R/I\bigotimes_R(I+J)=(I+J)/I$． 再由自然满射$I\oplus J\xrightarrow{\pi}I+J$得

$$R/I\bigotimes_R J=R/I\bigotimes_R(I\oplus J)\xrightarrow{1\otimes\pi}R/I\otimes(I+J)=(I+J)/I$$

$$\mathrm{Ker}(1\otimes\pi)=\{\textstyle\sum\bar{r}_i\otimes j_i=\bar{1}\otimes(\sum r_i j_i)=\bar{1}\otimes j\mid j\in I\cap J\}=R/I\bigotimes_R(I\cap J)$$

因为$I\cap J$是包含在I中的R的左理想。所以$\mathrm{Ker}(1\otimes\pi)=0$，即$R/I\bigotimes_R J=(I+J)/I$．由此可得下面的可换图

$$\begin{array}{ccc}
R/I\bigotimes_R J & \xrightarrow{1\otimes i} & R/I\bigotimes_R R\\
\cong\downarrow 1\otimes\pi & & \cong\downarrow\rho\\
(I+J)/I & \xrightarrow{\Lambda} & R/I
\end{array}$$

由于$1\otimes\pi$和ρ都是同构，而$\wedge$是嵌入映射，所以对任意的$J\xrightarrow{i}R$，J是R的左理想，有

$$1\otimes i:\ R/I\bigotimes_R J\text{——}R/I\bigotimes_R R$$

是单同态．根据[4]（p．226．引理1）得R/I是右平坦的．

“(2)⇔(3)”：由左R-模的短正合列$0\to L\to R\to R/L\to 0$，可得正合列

$$0\to\mathrm{Tor}_1(R/I,R/I)\to R/I\bigotimes_R L\to R/I\bigotimes_R R\to R/I\bigotimes_R R/L\to 0$$

由引理1.1可得$R/I\bigotimes R/L\cong R/I+L=R/I\cong R/I\bigotimes_R R$，所以$\mathrm{Tor}_1(R/I,R/L)\cong R/I\bigotimes_R L$．

又根据[1]（Cor．11．27）有

$$\mathrm{Tor}_1(R/I, R/L) = I\cap L/I\cdot L = L/I\cdot L$$

因此，$R/I\bigotimes_R L = L/I\cdot L$. 立得

$$R/I\bigotimes L = 0 \Leftrightarrow L = I\cdot L$$ ∎

推论1.4 设R是可换环，I是R的极小理想，则下列等价：

（1） R/I是平坦R-模；

（2） $R/I\bigotimes_R I = 0$；

（3） $I^2 = I$

推论1.5 设R是任意环，$\mathrm{Soc}({}_RR)\neq 0$，则下列等价：

（1） $R/\mathrm{Soc}({}_RR)$是平坦的右R-模；

（2） $R/\mathrm{Soc}({}_RR)\bigotimes_R I = 0$，对任意极小左理想$I$；

（3） $\mathrm{Soc}({}_RR)\cdot I = I$， 对任意极小左理想$I$.

证明 由命题1.3的证明知(2)和(3)等价．显然从(1)可以得到(2)，所以下面只要证明可以从(2)推出(1)即可．

$\forall J <_R R$且$J\subset \mathrm{Soc}({}_RR)$，则$J$是一些极小左理想的直和，即$J = \coprod I_i$，这里$I_i$是$R$的极小左理想，于是

$$R/\mathrm{Soc}({}_RR)\bigotimes_R J = \coprod (R/\mathrm{Soc}({}_RR)\bigotimes_R I_i) = 0$$

因此，由命题1.3可知$R/\mathrm{Soc}({}_RR)$是平坦的右R-模． ∎

命题1.6 设R是不含非零的幂零极小左理想的环，$\mathrm{Soc}({}_RR)\neq 0$，则

（1） $R/\mathrm{Soc}({}_RR)$是平坦的右R-模；

（2） $\mathrm{Soc}({}_RR)$ 是投射的左R-模．

证明 （1） 对任意的极小左理想I，则有$I^2\neq 0$，即$I^2 = I$，又因为$I\subset \mathrm{Soc}({}_RR)$，所以必有$\mathrm{Soc}({}_RR)\cdot I = I$．由推论1.5得$R/\mathrm{Soc}({}_RR)$是平坦的右$R$-模．

（2） 设I是R的极小左理想。取$x\in I$，$x\neq 0$．作一个同态映射π，使得

$$\pi: R\to I,\quad r\mapsto rx$$

令$\mathrm{Ker}\pi = K$，则有短正合列

$$0\to K\to R\xrightarrow{\pi} I\to 0$$

即得$R/K\cong I$，所以K是R的一个极大左理想．因为$I^2 = I$，即存在$b\in I$，使$bI\neq 0$，所以$\bar{b}\cdot R/K\neq 0$，亦即是$b\notin K$，由于K是极大左理想，必有$K + I = R$，又因为I是极小左理想，则有$K\cap I = 0$，即$K\oplus I = R$，也就是说I是投射的左R-模．

由于$\mathrm{Soc}({}_RR)$是R的极小左理想的和，即是一些投射模的直和，所以$\mathrm{Soc}({}_RR)$ 是投射的左R-模． ∎

§2 $R/\mathrm{Soc}({}_RR)$的同调维数

本节将用到J.C.Thomas的博士论文中的一个主要结果，我们把它写成如下的引理：

引理2.1[3] 设R是任意环，则有

（1） $\mathrm{LGD}(R)\leq \mathrm{LGD}(R/\mathrm{Soc}({}_RR)) + l\cdot pd_R(R/\mathrm{Soc}({}_RR))$；

（2） $\mathrm{WD}(R)\leq \mathrm{WD}(R/\mathrm{Soc}({}_RR)) + l\cdot fd_R(R/\mathrm{Soc}({}_RR))$.

命题2.2 设 $R\to S$是环同态，S_R平坦，且 $S\bigotimes_R S=S$，则

（1） $\mathrm{LGD}(S)\le\mathrm{LGD}(R)$；

（2） $\mathrm{WD}(S)\le\mathrm{WD}(R)$.

证明 因为（1）和（2）的证明是类似的，所以这里只给出（1）的证明.

我们先证，$\forall M\in{}_S\mathfrak{M}$ 有

$$l\cdot pd_R(M)\ge l\cdot pd_S(M) \qquad (*)$$

若 $l\cdot pd_R(M)=\infty$，则（*）式显然成立. 假设 $l\cdot pd_R(M)=n$，则有左 R-模的投射分解：

$$0\leftarrow {}_RM\leftarrow P_0\leftarrow P_1\leftarrow\cdots\leftarrow P_n\leftarrow 0$$

由此可得左 S-模的投射分解

$$0\leftarrow S\bigotimes_R M\leftarrow S\bigotimes_R P_0\leftarrow S\bigotimes_R P_1\leftarrow\cdots\leftarrow S\bigotimes_R P_n\leftarrow 0$$

于是 $l\cdot pd_S(S\bigotimes_R M)\le n$，但是

$$S\bigotimes_R M=S\bigotimes_R(S\bigotimes_S M)=(S\bigotimes_R S)\bigotimes_S M=S\bigotimes_S M=M$$

所以（*）式成立. 由此可得

$$\begin{aligned}\mathrm{LGD}(R)&\ge\sup\{l\cdot pd_R(M)\mid\forall M\in{}_S\mathfrak{M}\}\\&\ge\sup\{l\cdot pd_S(M)\mid\forall M\in{}_S\mathfrak{M}\}=\mathrm{LGD}(S).\end{aligned}$$ ■

由命题2.2和推论1.2立得：

推论2.3 若 $I\lhd R$，R是任意环，R/I是平坦的右R-模，则有

（1） $\mathrm{LGD}(R/I)\le\mathrm{LGD}(R)$；

（2） $\mathrm{WD}(R/I)\le\mathrm{WD}(R)$.

综合引理2.1和推论2.3又得：

推论2.4 设 R是任意环，$R/\mathrm{Soc}({}_RR)$ 是平坦的右R-模，则有

（1） $\mathrm{LGD}(R/\mathrm{Soc}({}_RR))\le\mathrm{LGD}(R)\le\mathrm{LGD}(R/\mathrm{Soc}({}_RR))+l\cdot pd_R(R/\mathrm{Soc}({}_RR))$；

（2） $\mathrm{WD}(R/\mathrm{Soc}({}_RR))\le\mathrm{WD}(R)\le\mathrm{WD}(R/\mathrm{Soc}({}_RR))+l\cdot fd_R(R/\mathrm{Soc}({}_RR))$.

命题2.5 若环R不含非零的幂零极小左理想；则有

（1） $\mathrm{LGD}(R/\mathrm{Soc}({}_RR))\le\mathrm{LGD}(R)\le\mathrm{LGD}(R/\mathrm{Soc}({}_RR))+1$；

（2） $\mathrm{WD}(R/\mathrm{Soc}({}_RR))\le\mathrm{WD}(R)\le\mathrm{WD}(R/\mathrm{Soc}({}_RR))+1$.

证明 由命题1.6知，若 $\mathrm{Soc}({}_RR)\ne0$，则左基座$\mathrm{Soc}({}_RR)$是投射的，所以$l\cdot pd_R(R/\mathrm{Soc}({}_RR))\le1$，显然这时必有$l\cdot fd_R(R/\mathrm{Soc}({}_RR))\le1$. 由推论2.4即得所证. ■

定理2.6 若R是不含非零的单侧幂零理想的环，则有

（1） $\mathrm{LGD}(R/\mathrm{Soc}(R))\le\mathrm{LGD}(R)\le\mathrm{LGD}(R/\mathrm{Soc}(R))+1$；

（2） $\mathrm{WD}(R/\mathrm{Soc}(R))=\mathrm{WD}(R)$

证明 由于R不含非零的单侧幂零理想，于是$\mathrm{Soc}({}_RR)=\mathrm{Soc}(R_R)$，由命题1.6可知$R/\mathrm{Soc}(R)$是平坦的$R$-模，于是由推论2.4即得所证. ■

由于本原环和 Von-Neumann正则环都是不含非零的单侧幂零理想的环，所以从定理2.6立即可得如下的

推论2.7 （1） 若R是左（右）本原环，则有定理2.6 的结果成立；

（2） 若R是Von-Neumann正则环，则有定理2.6的结果成立，这时$R/\mathrm{Soc}(R)$也是

Von-Neumann 正则环.

下面的例子说明：存在一个有非零基座的本原环R，使得$\mathrm{LGD}(R/\mathrm{Soc}(R))=\mathrm{LGD}(R)$，

设 $$T=\left\{\begin{pmatrix} A & & & \\ & k & & \\ & & k & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \middle| A\in M_p(K),\ p\in \mathbf{Z}^+,\ k\in K,\ K\text{是域}\right\}$$

则T有非零基座：

$$S=\left\{\begin{pmatrix} A & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \middle| A\in M_p(K),\ p\in \mathbf{Z}^+\right\}$$

由[5] p.65知，T是一个本原环，且$\mathrm{LGD}(T)=1$.但是

$$T/S\cong\left\{\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots^{p} & & & \\ & & k & & \\ & & & k & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \middle| k\in K,\ p\in \mathbf{Z}^+\right\}\cong K$$

因此$\mathrm{LGD}(T/S)=0$.

本文作者对周伯埙教授和佟文廷教授的指导表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] J.J.Rotman, An Introduction to Homological Algebra, Acad, Press. 1979.
[2] K: R. Goodeal, Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules, Marcel Dekker. 1976.
[3] J. C. Thomas, Homological Dimension under Change of Rings, Com. Algebra.7(6), 255—640 (1979).
[4] 周伯埙，同调代数，科学出版社，1988.
[5] 李微，关于本原环的总体维数，南京大学数学半年刊，1(1984).

On the Global Dimension of Residue Rings

Yang Jinghua

(China Pharmaceutical University)

If R/I is a flat R-module, the necessary-sufficient condition is given. Moreover, it is showh that the following two relations hold if a ring R has no non-zero nilpotent one-sided ideals:

(1) $\mathrm{LGD}(R/\mathrm{Soc}(R))\leq\mathrm{LGD}(R)\leq\mathrm{LGD}(R/\mathrm{Soc}(R))+1$;

(2) $\mathrm{WD}(R/\mathrm{Soc}(R))=\mathrm{WD}(R)$.

Particularly, the above relations holds for primitive rings and Von-Neumann regular rings.