第11卷 第4期 1991年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMTICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.11 No.4 Nov., 1991

对角型蜕化椭圆组广义解的有界性和可积性*

梁鋈廷 （中山大学数学系，广州）
鲁又文 （天津师范大学数学系，天津）

摘　　要

考虑一类对角型蜕化椭圆组，证明广义解的有界性和 L_Φ-可积性.

Ладыженская-Уральцева最先开始研究对角型椭圆组，在 $p=2$ 的情形证明广义解的有界性和Hölder连续性（见[1]）. Meier[2]中考虑了如下形状的椭圆组:

$$\int_G\{\nabla v^i\cdot\vec{A_i}(x,u,\nabla u)+v^iB_i(x,u,\nabla u)\}\,dx=0,\quad \forall v\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(G,E^N)\qquad(1)$$

其中 G 为 n 维欧氏空间 E^n 中的有界Lipschitz区域. $\vec{A_i}(x,u,\xi)=\{A_i^\alpha(x,u,\xi),\ \alpha=1,2,\cdots,n\}$ 和 $B_i(x,u,\xi)$ 分别在 $G\times E^N\times E^{nN}$ 上定义，对固定的 x 关于 u,ξ 为连续，对固定的 u,ξ 关于 x 为可测. $p>1$, $W_p^1(G,E^N)$ 和 $\overset{\circ}{W}{}_p^1(G,E^N)$ 为向量值函数的Соболев空间. [2] 中给出某种充分条件保证（1）的解 $u\in W_p^1(G,E^N)$ 的有界性. 当 $p=2$ 并且方程组(1)是对角型椭圆组时，Meier的条件是满足的. 因而[2]中结果改进了[1]中关于解的有界性的结果. [3]中在比[2]更强一些的条件下，用和[2]不同的方法证明了(1)的解 $u\in W_p^1(G,E^N)$ 的有界性. [3]中还考虑了(1)的无界解的 L_Φ-可积性. 在Landes[4]中，对 $2\le p\le n$ 并且方程组(1)是对角型椭圆组情形，借助关于 $|\nabla(|u|)|^p$ 的一个估计式重新得到解的整体有界性并且证明更为简单. 在Landes恒等式的基础上，仍限于 $2\le p\le n$ 的情形，本文对一类对角型椭圆组（允许 $B_i(x,u,\xi)$ 关于 u 达到临界增长而关于 ξ 的增长阶 γ 可大于 $p-1$）得到解的有界性和 L_Φ-可积性，推广单个椭圆型方程的相应结果. 本文结果叙述为下面的

定理1 设 $\vec{A_i}$、B_i 分别满足如下的条件:

$$\begin{aligned}&A_i^\alpha(x,u,\nabla u)=a^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u)D_\alpha u^i\qquad(D_\alpha=\partial/\partial x^\alpha)\\&a^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u)\xi^\alpha\xi^\beta\ge|\nabla u|^{p-2}|\xi|^2,\quad 2\le p\le n\\&|a^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u)|\le k|\nabla u|^{p-2}\\&|u^iB_i(x,u,\nabla u)|\le(1-\tau)|\nabla u|^p+|u|(c(x)|\nabla u|^\gamma+c|u|^{q-1}+f(x))\end{aligned}\qquad(2)$$

其中 $k\ge1$, $0<\tau\le1$

$q=\dfrac{np}{n-p}$ 当 $p<n$; $p\le q<+\infty$ 当 $p=n$, $p-1\le\gamma\le p-1+\dfrac{p}{n}$ 当 $p<n$; $p-1\le\gamma<p$ 当 $p=n$, $c(x)\in L_r(G)$.

* 1989年10月30日收到.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}<1-\dfrac{1}{q}-\dfrac{\gamma}{p} & \text{当 } 2\le p<n,\ p-1\le\gamma<p-1+\dfrac{p}{n} \\ r=\infty & \text{当 } 2\le p<n,\ \ \gamma=p-1+\dfrac{p}{n} \\ r>\dfrac{n}{p-\gamma} & \text{当 } p=n,\ p-1\le\gamma<p \end{cases} \tag{3}$$

$$f(x)\in L_s(G),\quad s>n/p. \tag{4}$$

设 $u\in W_p^1(G,E^N)$ 满足（1）．如果存在常数 $M>0$ 使

$$|u|\le M \qquad \text{在} G \text{的边界} \partial G \tag{5}$$

那么 u 在 G 整体有界．

定理 2 设 A_i、B_i 满足条件（2），其中 $2\le p<n$，$p-1+\dfrac{p}{n}<\gamma<p$，$q=\dfrac{np}{n-p}$，$c(x)\in L_r(G)$，$r>\dfrac{n}{p-\gamma}$，$f(x)$ 仍满足（4）．设 $t>t_0$，

$$t_0=\frac{n(\gamma+1-p)}{p-\gamma},\ \text{当 } r=\infty;\ \ t_0=\frac{rn(\gamma+1-p)}{r(p-\gamma)-n},\ \text{当 } \frac{n}{p-\gamma}<r<+\infty,$$

设 $u\in W_p^1(G,E^N)\cap L_t(G,E^N)$ 满足（1）和（5），那么 u 在 G 整体有界．

定理 3 设定理 1 中的条件（4）换为

$$f(x)\in L_s(G),\quad s=n/p \tag{4$'$}$$

其它条件照旧，那么存在适当的 $K>0$（K 依赖于 u 和 f 的有关范数，详见下面的(20)）使

$$\int_G|u|^\gamma\exp(|u|/K)\,\mathrm{d}x<\infty\quad(\gamma\ge 0 \text{ 可以任意}) \tag{6}$$

定理 4 设定理 2 中的条件（4）换为（4）$'$，其它条件照旧，那么存在适当的 $K>0$，使（6）成立．

定理 1 的证明 设 $k\ge M$，置

$$v=(1-\frac{k}{|u|})u,\ \text{当 } |u|>k;\ \ v=0,\ \text{当 } |u|\le k \tag{7}$$

由于设 G 是 Lipschitz 区域并且 u 满足边界条件（5），因而 $v\in \mathring{W}_p^1(G,E^N)$．取 v 作试验函数，代入（1）即得

$$0=\int_{A(k)}(a^{\alpha\beta}D_\alpha v^iD_\beta u^i+v^iB_i)\,\mathrm{d}x \tag{1$'$}$$

其中 $A(k)=G\cap\{|u(x)|>k\}$ 是积分的有效区域．根据[4]，成立如下的恒等式：

$$|\nabla(|u|)|^2=\sum_\alpha\Big(\frac{u^iD_\alpha u^i}{|u|}\Big)^2=\sum_\alpha|D_\alpha u|^2\cos^2\lambda_\alpha$$

$$|D_\alpha u|^2=\sum_i|D_\alpha u^i|^2,\quad \cos\lambda_\alpha=\frac{u^iD_\alpha u^i}{|u|\,|D_\alpha u|}$$

联合（1）$'$ 和（2）给出

$$\int_{A(k)}|\nabla u|^{p-2}\{\tau(1-\frac{k}{|u|})|\nabla u|^2+\frac{k}{|u|}|\nabla(|u|)|^2\}\,\mathrm{d}x$$

$$\le\int_{A(k)}(|u|-k)(c(x)|\nabla u|^\gamma+c|u|^{q-1}+f(x))\mathrm{d}x \tag{8}$$

先考虑 $2\le p<n$ 的情形，由嵌入定理 $|u|\in L_q(G)$，再由 Hölder 不等式和 Young 不等式，我们有

$$\int_{A(k)}(|u|-k)c(x)|\nabla u|^\gamma\mathrm{d}x$$

$$\le\Big(\int_{A(k)}(1-\frac{k}{|u|})|\nabla u|^p\mathrm{d}x\Big)^{\gamma/p}\|u\|_{L_q(A(k))}\|c(x)\|_{L_r(G)}|A(k)|^{1-\frac{1}{q}-\frac{\gamma}{p}-\frac{1}{r}}$$

$$\leq \frac{\tau}{2}\int_{A(k)}(1-\frac{k}{|u|})|\nabla u|^{p}\mathrm{d}x+c\|u\|_{L_q(A(k))}^{\frac{p}{p-\gamma}}|A(k)|^{\sigma_1}, \tag{9}$$

$$\sigma_1=\frac{p}{p-\gamma}(1-\frac{1}{q}-\frac{\gamma}{p}-\frac{1}{r})>0. \tag{10}$$

其中为书写方便，把范数 $\|c(x)\|$ 吸收到常数 C 中，又 $|A(k)|$ 记 $A(k)$ 的Lebesgue测度．联合(8)、(9)给出

$$\frac{\tau}{2}\int_{A(k)}|\nabla(|u|)|^{p}\mathrm{d}x\leq\frac{\tau}{2}\int_{A(k)}|\nabla u|^{p-2}\{(1-\frac{k}{|u|})|\nabla u|^{2}+\frac{k}{|u|}|\nabla(|u|)|^{2}\}\mathrm{d}x$$

$$\leq C\{|A(k)|^{\sigma_1}[(\int_{A(k)}(|u|-k)^{q}\mathrm{d}x)^{p/q}\|u\|_{L_q(G)}^{p(\frac{\gamma-1+p}{p-\gamma})}+(k^{q}|A(k)|)^{\frac{1}{q}(\frac{p}{p-\gamma})}]$$

$$+(\int_{A(k)}(|u|-k)^{q}\mathrm{d}x)^{p/q}\|u\|_{L_q(A(k))}^{1-p/q}+k^{q}|A(k)|$$

$$+(\int_{A(k)}(|u|-k)^{q}\mathrm{d}x)^{1/q}\|f\|_{L_s(G)}|A(k)|^{1-\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}\} \tag{11}$$

根据Lebesque积分的绝对连续性，我们有

$$\int_{A(k)}|u|^{q}\mathrm{d}x\to 0,\quad 当\ k\to\infty \tag{12}$$

(因为 $|A(k)|\leq k^{-q}\int_{G}|u|^{q}\mathrm{d}x\to 0$，当 $k\to\infty$) 考虑到 u 满足(5)，$(|u|-k)^{+}\in\mathring{W}_{p}^{1}(G)$，由嵌入定理

$$(\int_{A(k)}(|u|-k)^{q}\mathrm{d}x)^{1/q}=(\int_{G}|(|u|-k)^{+}|^{q}\mathrm{d}x)^{1/q}\leq C(\int_{A(k)}|\nabla(|u|)|^{p}\mathrm{d}x)^{1/p} \tag{13}$$

其中的常数 $C>0$ 和 u, k, G 无关．联合(11)～(13)，只要 $k_0\geq M+1$ 取得足够大并且 $k\geq k_0$，即得

$$(\int_{A(k)}(|u|-k)^{q}\mathrm{d}x)^{1/q}\leq C\{|A(k)|^{\sigma_1/p}(k^{q}|A(k)|)^{\frac{1}{q}(\frac{1}{p-\gamma})}$$

$$+(k^{q}|A(k)|)^{1/p}+\|f\|_{L_s(G)}^{\frac{1}{p-1}}|A(k)|^{\frac{1}{p-1}(1-\frac{1}{q}-\frac{1}{s})}\} \tag{14}$$

其中的 $C>0$ 可以取得和 k 无关(C 除了和 k_0 有关外，显然和 u 有关．但对确定的 u, C 可看作是常数)．考虑到 $k^{q}|A(k)|\leq\|u\|_{L_q(G)}^{q}$，由(14)继续得

$$(\int_{A(k)}(|u|-k)^{q}\mathrm{d}x)^{1/q}\leq Fk^{1+q\sigma}|A(k)|^{\frac{1}{q}+\sigma},\quad k\geq k_0>1, \tag{15}$$

$$\sigma=\min\{\frac{\sigma_1}{p},\frac{1}{n},\frac{1}{p-1}(\frac{p}{n}-\frac{1}{s})\}>0,$$

$$F=C\{\|u\|_{L_q(G)}^{\frac{\gamma+1-p}{p-\gamma}}|G|^{\frac{\sigma_1}{p}-\sigma}+\|u\|_{L_q(G)}^{q(\frac{1}{n}-\sigma)}+\|f\|_{L_s(G)}^{\frac{1}{p-1}}|G|^{\frac{1}{p-1}(\frac{p}{n}-\frac{1}{s})-\sigma}\} \tag{16}$$

$$\int_{A(k)}(|u|-k)\mathrm{d}x\leq Fk^{1+q\sigma}|A(k)|^{1+\sigma},\quad k\geq k_0 \tag{17}$$

记 $k_\infty=\sup\{k|\int_{A(k)}(|u|-k)\mathrm{d}x>0\}$（不排除 $k_\infty=\infty$），那么 $\underset{G}{\mathrm{vraimax}}|u|\leq k_\infty$．(17) 隐含了

$$\frac{1}{k_0^{\mu}}-\frac{1}{k_\infty^{\mu}}\leq(q-1)F\frac{1}{k_0^{\mu}}[k_0^{q}|A(k_0)|]^{\sigma}\qquad 即$$

$$\frac{1}{k_\infty^{\mu}}\geq\frac{1}{k_0^{\mu}}\{|-(q-1)F(k_0^{q}|A(k_0)|)^{\sigma}\}, \tag{18}$$

$$\mu=\frac{(q-1)\sigma}{1+\sigma}>0$$

(关于(18)的详细推导可见[5]，10～11页)．由于 $k_0^{q}|A(k_0)|=\int_{A(k_0)}|u|^{q}\mathrm{d}x$，根据(12)只

要k_0取得足够大，可以保证(18)右端严格大于0，后者隐含了 $\operatorname{vrai}\max_G|u|\leq k_\infty<+\infty$，亦即$2\leq p<n$的情形定理1的断言为真．$p=n$的情形证明方法完全相同，只是由于嵌入定理形式的不同，证明需要作必要的修改．为此，取$l<+\infty$足够大，使

$$0<\frac{1}{l}<1-\frac{\gamma}{p}-\frac{1}{r}=\frac{p-\gamma}{n}-\frac{1}{r}\quad(p=n!)$$

对如此l，取$p'\in[2,n)$使$1/l=1/p'-1/n$．于是

$$\left(\int_{A(k)}(|u|-k)^l\mathrm{d}x\right)^{1/l}\leq C(n,l)\left(\int_{A(k)}|(\nabla(|u|)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{1/p'}$$

$$\leq C(n,l)|A(k)|^{\frac{1}{l}-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}\left(\int_{A(k)}|\nabla(|u|)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

不妨设$l>q$(q为(2)中出现的指数)，那么在v^iB_i中包含有$|u|^q$的一项估计如下：

$$\left(\int_{A(k)}|u|^q\mathrm{d}x\right)\leq\left(\int_{A(k)}|u|^l\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{l}}|A(k)|^{1-q/l}$$

$$\leq\left[\left(\int_{A(k)}(|u|-k)^l\mathrm{d}x\right)^{q/l}+(k^l|A(k)|)^{q/l}\right]|A(k)|^{1-q/l}$$

有了以上准备，用l取代前面对$2\leq p<n$情形证明中q的地位，那么前面作过的证明可以进行直至得到$\operatorname{vrai}\max_G|u|<+\infty$(详细从略)．定理1至此完全获证．

定理2的证明和定理1类似，仅有的修改是用下面的(9)′取代(9)：

$$\int_{A(k)}(|u|-k)C(x)|\nabla u|^\gamma\mathrm{d}x\leq\left(\int_{A(k)}\left(1-\frac{k}{|u|}\right)|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{\gamma/p}\|u\|^{p-\gamma}_{L_q(A(k))}$$
$$\times\|u\|^{\gamma+1-p}_{L_t(G)}\|C(x)\|_{L_r(G)}|A(k)|^{1-\frac{\gamma}{p}-\frac{p-\gamma}{q}-\frac{\gamma+1-p}{t}-\frac{1}{r}}.\tag{9'}$$

为证定理3，我们要利用下面的引理，它的证明我们放到最后去完成．

引理 对定理3的条件下，对任何$p<l<+\infty$，$|u|\in L_l(G)$．

定理3的证明 设$k\geq M$，根据引理断言对任何$l>p$，

$$k^l|A(k)|\leq\left(\int_G|u|^l\mathrm{d}x\right)<+\infty$$

重复证明定理1作过的推导，在$2\leq p<n$的情形代替(15)我们现在有

$$\left(\int_{A(k)}(|u|-k)^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leq F_1|A(k)|^{1/q},\quad k\geq k_0\tag{19}$$

$$F_1=C\left\{\|u\|^{\frac{1}{p-\gamma}}_{L\left(\frac{\sigma_1}{p}(p-\gamma)+\frac{\gamma+1-p}{q}\right)^{-1}(G)}+\|u\|^{q/p}_{L_nq/p(G)}+\|f\|^{\frac{1}{p-1}}_{L_{n/p}(G)}\right\},\tag{20}$$

由(19)出发，重复[3]中作过的证明，即见$K>F_1$时，(6)成立．亦即$2\leq p<n$的情形定理3断言为真．$p=n$的情形证明完全类似．从略．

定理4的证明也和定理3类似．

引理的证明 $p=n$时引理断言是平凡的．设$2\leq p<n$，设$h>k\geq M$，$\gamma\geq0$，那么

$$\mathring{W}^1_p(G,E^N)\ni v=\begin{cases}\left[1-\left(\dfrac{k}{|u|}\right)^{\gamma+1}\right]|u_h|^\gamma u, & \text{当 } |u|>k\\ 0 & \text{当 } |u|\leq k\end{cases}$$

($|u_h|=|u|$，当$|u|<h$；$|u_h|=h$，当$|u|\geq h$)

这样的v可取作试验函数．对这样的v我们有

$$\int_G a^{\alpha\beta} D_\alpha v^i D_\beta v^i \mathrm{d}x \geq \int_{A(k)} [1-(\frac{k}{|u|})^{\gamma+1}] |u_h|^\gamma |\nabla u|^p \mathrm{d}x$$
$$+\int_{A(k)\setminus A(h)} \gamma [1-(\frac{k}{|u|})^{\gamma+1}] |u|^\gamma |\nabla u|^{p-2} |\nabla(|u|)|^p \mathrm{d}x$$
$$+\int_{A(k)} (\gamma+1)(\frac{k}{|u|})^{\gamma+1} |u_h|^\gamma |\nabla u|^{p-2} |\nabla(|u|)|^2 \mathrm{d}x \tag{21}$$

$$\int_G v^i B_i \mathrm{d}x \leq \int_{A(k)} [1-(\frac{k}{|u|})^{\gamma+1}] |u_h|^\gamma \{(1-\tau)|\nabla u|^p$$
$$+|u|(C(x)|\nabla u|^\gamma + C|u|^{q-1} + f(x))\} \mathrm{d}x \tag{22}$$

$$\int_{A(k)} [1-(\frac{k}{|u|})^{\gamma+1}] |u_h|^\gamma |u| C(x) |\nabla u|^\gamma \mathrm{d}x$$
$$\leq (\int_{A(k)} [1-(\frac{k}{|u|})^{\gamma+1}] |u_h|^\gamma |\nabla u|^p \mathrm{d}x)^{\gamma/p} (\int_{A(k)} |U_h|^q \mathrm{d}x)^{\frac{p-\gamma}{q}} C_u |A(k)|^{1-\frac{\gamma}{p}-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \tag{23}$$

其中
$$U_h = |u_h|^{\gamma/p} |u|$$
$$C_u = \|u\|_{L_q(G)}^{\gamma+1-p} \|C(x)\|_{L_r(G)} \quad \text{（对确定的 } u \text{ 看作常数）}$$

由于设 $k \geq M$ 和条件(5)，根据嵌入定理

$$(\int_{A(k)} |U_h|^q \mathrm{d}x)^{1/q} = (\int_{A(k)} |U_h - k^{1+\gamma/p} + k^{1+\gamma/p}|^q \mathrm{d}x)^{1/q}$$
$$\leq (\int_G |(U_h - k^{1+\gamma/p})^+|^q \mathrm{d}x)^{1/q} + k^{1+\gamma/p} |A(k)|^{1/q}$$
$$\leq C(p)(1+\frac{\gamma}{p}) (\int_{A(k)} |u_k|^\gamma |\nabla(|u|)^p \mathrm{d}x)^{1/p} + k^{1+\gamma/p} |A(k)|^{1/q} \tag{24}$$

联合(21)～(24)和(1)′，借助Hölder不等式和Young不等式(如上所说 C_u 看作常数)，即得

$$(\int_{A(k)} U_h^q \mathrm{d}x)^{p/q} \leq C\{(\int_{A(k)} U_h^q \mathrm{d}x)^{p/q} |A(k)|^{\sigma_1}$$
$$+ k^{\gamma+p} |A(k)|^{p/q} + (\int_{A(k)} U_h^q \mathrm{d}x)^{p/q} (\int_{A(k)} |u|^q \mathrm{d}x)^{1-p/q}$$
$$+ (\int_{A(k)} U_h^q \mathrm{d}x)^{\frac{p}{q}(\frac{\gamma+1}{p+1})} \|f\|_{L_{n,p}(G)} |A(k)|^{\frac{p}{q}(\frac{p-1}{\gamma+p})}\} \tag{25}$$

其中 C 和 k 无关，$\sigma_1 > 0$（表示式同前），只要取 $k_0 = k_0(u) > 0$ 足够大，那么当 $k \geq k_0$ 由(25)

得
$$(\int_{A(k)} U_h^q \mathrm{d}x)^{\frac{p}{q}(\frac{p-1}{\gamma+p})} \leq C\{[k^{\gamma+1} |A(k)|^{p/q}]^{\frac{p-1}{\gamma+p}}$$
$$+ \|f\|_{L_{n,p}(G)} |A(k)|^{\frac{p}{q}(\frac{p-1}{\gamma+p})}\} \tag{26}$$

上式右端和 h 无关，根据单调收敛定理，命 $h \to \infty$ 由(26)给出

$$\int_{A(k)} |u|^{\frac{q}{p}(\gamma+p)} \mathrm{d}x = \lim_{h\to\infty} \int_{A(k)} U_h^q \mathrm{d}x < +\infty \tag{27}$$

由于 γ 的任意性，(27)隐含了引理断言正确．证迄．

参 考 文 献

[1] Ладыженская, О. А., Уральцева, Н. Н., 线性与拟线性椭圆型方程，科学出版社，北京，1987.

[2] Meier, M., Boundedness and integrality properties of weak solutions of quasilinear elliptic systems, J. reine angew. Math., 333, 1982, 191—220.

[3] 梁鋆廷，拟线性二阶椭圆型方程组广义解的有界性和可积性，延边大学学报(自然科学版)，No.1, 1987, 1—12.

1—12.
[4] Landes, R., Some remarks on bounded and unbounded weak solutions of elliptic systems, Manuscripta Math, 64, 1989, 227—234.
[5] 梁鋆廷，拟线性椭圆型方程广义解的有界性，阴山学刊(自然科学版)，No.1，1989，6—12.
[6] 梁鋆廷，拟线性二阶椭圆型方程组广义解的可积性，新疆大学学报(自然科学版)，V.4，No.4，1987，33—40.

Boundedness and Integrability for Generalized Solutions of Degenerate Elliptic Systems in Diagonal Form

Liang Xiting *Lu Youwen*
(Zhongshan University) (Tianjin Normal University)

Abstract

Consider a class of degenerate elliptic systems in diagonal form and prove the boundedness and L_{Φ}-integrability for generalized solutions.