第11卷 第4期
1991年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.4
Nov., 1991

坝体渗流自由边值问题的一个解法*

战同胜
（大连大学师范学院数学系）

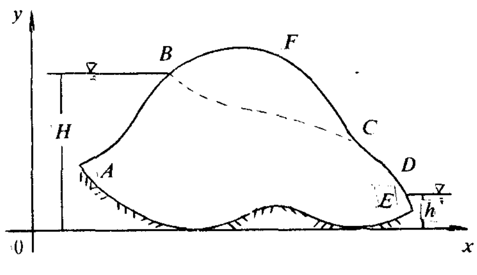
罗远诠
（大连理工大学应用数学系）

前言

考虑水坝的二维渗流问题，如图一．问题归结为如下的定解问题[1]：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(K\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(K\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0 & \text{在区域内} \\
\dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & \text{在AE上} \\
u=y,\quad \dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & \text{在BC上} \\
u=y,\quad \dfrac{\partial u}{\partial n}<0 & \text{在CD上} \\
u=H & \text{在AB上} \\
u=h & \text{在DE上}
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中BC是自由边界面，H和h是常数，$H>h$，渗透系数K是x，y的函数，$K>0$．由于自由边界BC的存在，直接去解问题（1）比较困难．



图一　水坝渗透问题

1980年Crank 和Ozis提出一个方法[2]，将变量u和x的函数关系交换，把（1）化为未知函数为$x(u,y)$的在一个梯形区域上的固定边界问题，大大简化了问题的求解．但是要求AE必须是直线$y=0$．在工程实际上AE一般并不是水平的直线．因此他们的方法不能完全满足工程上的需要．1981年，他们又把这个方法用在三维坝体渗流问题上[3]．但对边界形状的限制更多一些．

本文提出一个能彻底解决问题的方法．这个方法引入一个辅助函数$v(x,y)$，它的等值线与$u(x,y)$的等值线组成一个曲线座标系．并且曲线AE及BCD都是$v(x,y)$的等值线．利用变换

$$
\begin{cases}
u=u(x,y) \\
v=v(x,y)
\end{cases}
\tag{2}
$$

可将问题（1）化为一个矩形域上的拟线性椭圆型方程组的固定边值问题．它很易用逐次超松弛差分方法求解．本方法还可以推广到坝中有排水井及三维渗流的情形．最后，作者指出，本

* 1990年2月14日收到．

文的方法也可用来处理其它的自由边值和可动边值问题，因此在方法上有重要的意义.

二、一个定性的定理

引理1 设自由边界面的方程为 $y=y(x)$，则 $y(x)$ 是单调下降函数.

证明 反证之，设 $y(x)$ 不是单调下降的，则必存在一点 x_0 使 $y(x_0)$ 达到极值. 由在BC上的边界条件 $u=y$ 知：如果过 $(x_0, y(x_0))$ 点有一根 u 的等值线伸入定解区域内，那么在 $(x_0, y(x_0))$ 的一邻域内，u 可在该邻域内达到极小值 $u=y(x_0)$. 这与椭圆型方程极大值原理矛盾；如果过 $(x_0, y(x_0))$ 点没有 u 的等值线伸入定解区域内，那么在点 $(x_0, y(x_0))$ 的一邻域内 u 在 $(x_0, y(x_0))$ 达到严格极值. 由椭圆型方程强极值原理知在此点或者 $\frac{\partial u}{\partial u}>0$（极大时），或者 $\frac{\partial u}{\partial n}<0$（极小时）. 与在BC上的另一边界条件 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$. 矛盾. ■

定理1 设 u 是（1）的解，那么对任一常数 C，$h<C<H$，等值线 $u=C$ 是一根两端分别在BCD及AE上的曲线.

证明 由椭圆型方程极值原理知，$u=C$ 不能是封闭的或自身相交的曲线. 又由引理1及BCD上的边界条件 $u=y$ 知，等值线 $u=C$ 有且只有一个端点在BCD上. 显然，由（1）的边界条件知另一点不能在AB或DE上. 故另一端点必在AE上. ■

三、问题的变换及解法

引入辅助问题

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 & \text{在区域内} \\ v=1 & \text{在BC及CD上} \\ v=0 & \text{在 AE上} \\ v=f_1(x, y) & \text{在 AB上} \\ v=f_2(x, y) & \text{在 DE上} \end{cases} \tag{3}$$

其中 $f_1(x, y)$，$f_2(x, y)$ 是任意满足如下性质的函数：当 (x, y) 沿边界从A到B时 $f_1(x, y)$ 从0单调变到1. 当 (x, y) 沿边界从D到E时 $f_2(x, y)$ 从1单调变到0. 由定理1知，问题（1）的解 $u(x, y)$ 的等值线两端分别在AE及BCD上，又易见问题（3）的解 $v(x, y)$ 的等值线的两端分别在AB，DE上. 因此 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 的等值线组成定解区域内的一个曲线座标系. 即变换（2）是非奇异的可逆变换. 该变换将图一中的定解区域变为矩形区域 $R:\{h\le u\le H, 0\le v\le 1\}$. 下面给出变换后的方程. 设（2）的逆变换为

$$\begin{cases} x=x(u, v) \\ y=y(u, v) \end{cases} \tag{4}$$

记 $J=x_u y_v - x_v y_u$，由隐函数微分法有

$$\begin{aligned} u_x &= y_v/J \\ v_x &= -y_u/J \\ u_y &= -x_v/J \\ v_y &= x_u/J \end{aligned} \tag{5}$$

在（4）中第一式两边分别对 x 及 y 求二次导数有：

$$0 = x_{uu}u_x^2 + 2x_{uv}u_x v_x + x_{vv}v_x^2 + x_u u_{xx} + x_v v_{xx}$$
$$0 = x_{uu}u_y^2 + 2x_{uv}u_y v_y + x_{vv}v_y^2 + x_u u_{yy} + x_v u_{yy}$$

将上两式相加并利用（1）及（3）中的第一式得到：

$$\begin{aligned}&(u_x^2+u_y^2)x_{uu}+2(u_xv_x+u_yv_y)x_{uv}+(v_x^2+v_y^2)x_{vv}\\&=+\left(\frac{K_x}{K}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{K_y}{K}\frac{\partial u}{\partial y}\right)x_u+\left(\frac{K_x}{K}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{K_y}{K}\frac{\partial v}{\partial y}\right)x_v\\&=\frac{K_x}{K}x_x+\frac{K_y}{K}x_y=\frac{K_x}{K}\end{aligned}$$

类似地有：

$$\begin{aligned}&(u_x^2+u_y^2)y_{uu}+2(u_xv_x+u_yv_y)y_{uv}+(v_x^2+v_y^2)y_{vv}\\&=\left(\frac{K_x}{K}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{K_y}{K}\frac{\partial u}{\partial y}\right)y_u+\left(\frac{K_x}{K}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{K_y}{K}\frac{\partial v}{\partial y}\right)y_v\\&=\frac{K_x}{K}y_x+\frac{K_y}{K}y_y=\frac{K_y}{K}\end{aligned}$$

将（5）代入上两式并注意到 $J\neq 0$ 得到变换后的方程为：

$$\begin{cases}(x_v^2+y_v^2)x_{uu}-2(x_ux_v+y_uy_v)x_{uv}+(x_u^2+y_u^2)x_{vv}=\dfrac{K_x}{K}J^2\\(x_v^2+y_v^2)y_{uu}-2(x_ux_v+y_uy_v)y_{uv}+(x_u^2+y_u^2)y_{vv}=\dfrac{K_y}{K}J^2\end{cases}\qquad(6)$$

下面给出变换后的边界条件．设曲线AB，BFCD，DE，EA的方程分别是 $g_1(x\ \ y)=0$，$g_2(x,y)=0$，$g_3(x,y)=0$，$g_4(x,y)=0$．又设 $v=f_1(x,y)$，$g_1(x,y)=0$ 的反函数为 $x=\xi_1(v)$，$y=\eta_1(v)$．$v=f_2(x,y)$，$g_3(x,y)=0$ 的反函数为 $x=\xi_2(v)$，$y=\eta_2(v)$．变换（2）将边界AB及DE变为 R 的边界 $u=H$ 及 $u=h$，在其上满足如下条件：

$$x=\xi_1(v),\quad y=\eta_1(v)\qquad \text{当 } u=H\qquad(7)$$
$$x=\xi_2(v),\quad y=\eta_2(v)\qquad \text{当 } u=h\qquad(8)$$

变换（2）将AE变为 R 的边界 $v=0$．利用（5）式，在AE上

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\left(u_x\frac{\partial g_4}{\partial x}+u_y\frac{\partial g_4}{\partial y}\right)\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial g_4}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g_4}{\partial y}\right)^2}=\left(y_v\frac{\partial g_4}{\partial x}-x_v\frac{\partial g_4}{\partial y}\right)\Big/\left(J\sqrt{\left(\frac{\partial g_4}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g_4}{\partial y}\right)^2}\right)$$

所以在边界 $v=0$ 上的边界条件为：

$$\begin{cases}y_v\dfrac{\partial g_4}{\partial x}-x_v\dfrac{\partial g_4}{\partial y}=0\\g_4(x,y)=0\end{cases}\qquad \text{当 } v=0\qquad(9)$$

类似地，变换（2）将BC及CD变为 R 的边界 $v=1$．对应CD的一段上满足如下条件：$g_2(x,y)=0$，$y=u$，设由此解出 $x=\xi_3(u)$．BC一段的形状是待求的，但它的曲线方程实际上是 $v(x,y)=1$．类似（9）式在其上应有 $y_v\dfrac{\partial v}{\partial x}-x_v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$，再利用（5），$R$ 上边界 $v=1$ 对应BC的一段边界条件可写出如下：

$$\begin{cases}y_vy_u+x_ux_v=0\\y=u\end{cases}$$

设由上式解出 $x=x^*$．现在 R 上 $v=1$ 的边界条件可写为：

$$\begin{cases} x = \min\left(x^*,\ \xi_3(u)\right) \\ y = u \end{cases} \qquad \text{当 } v = 1 \tag{10}$$

综合(6),(7),(8),(9),(10),得到以x,y为未知函数,u,v为自变量的一个定解问题.这是一个在矩形区域上的拟线性椭圆型方程组的固定边值问题.它很易用逐次超松弛差分方法求解.数值试验表明其收敛特性及误差与拉普拉斯方程的差分方法相近.

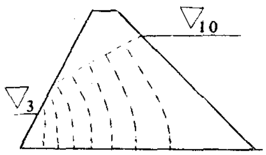
当图一中的定解区域内有排水井时,也可用本文方法来计算.例如,假设在$x=x_0$,$y=y_0$($h<y_0<H$)处有一排水井,那么在定解问题(1)中要加上一个条件:

$$u = y_0 \qquad \text{当 } x = x_0,\ y = y_0 \text{ 时} \tag{11}$$

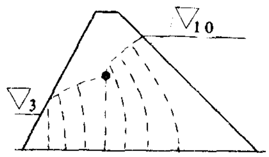
而(11)在变换(2)下变为

$$x = x_0,\ y = y_0 \qquad \text{当 } u = y_0,\ v = v_0 \text{ 时} \tag{12}$$

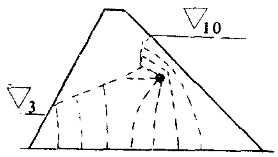
其中v_0是满足$0<v_0<1$的任意常数.将(12)加入到(6)~(10)中求解即可.顺便指出两点:(i)上面的$f_1(x,y)$,$f_2(x,y)$,v_0等的取法有一定的任意性.为使精度较好,可取得使$v(x,y)$的等值线分布比较均匀.(ii)(7),(8),(10)中的ξ_1,ξ_2,η_1,η_2,ξ_3等要求反函数才能得到.但是在进行数值求解时,只要对离散函数求反函数即可,因此这是容易的.限于篇幅,三维问题从略.



(i)无排水井



(ii)有排水井



(iii)有排水井

图二 数值例子的计算结果

数值例子 求解如图二中的梯形区域的渗流问题。其中上游水位为10米,下游水位为3米,上游坡度为1∶1,下游坡度为1∶2,底宽为20米.K取为常数.图中的圆点是井的位置.计算中取8×8网格,超松弛因子取为1.4,迭代误差取为10^{-5},约迭代30次即收敛。计算中得到的自由边界面及u的等值线如图中虚线所示.自由边界面的座标值如表一.

表一 自由边界面的计算值

y 值	3.0000	3.8750	4.7500	5.6250	6.5000	7.3750	8.2500	9.1250	10.0000
(i)的x值	1.5000	1.9375	2.3750	2.8125	4.1942	5.6260	7.2177	8.7732	10.0000
(ii)的x值	1.5000	1.9375	2.7342	4.4604	7.0000	7.0152	8.0029	8.9930	10.0000
(iii)的x值	1.5000	1.9375	3.6067	5.9168	7.8425	9.1707	9.1707	9.1707	10.0000

参 考 文 献

[1] John Crank, Free and moving boundary problems, Clarendon Press. Oxford (1984), pp 337.

[2] J. Crank and T. Ozis, J. Inst. Math. Appl. 26(1980), 77—85.

[3] J. Crank and T. Ozis, Brunel University Math. Report TR/03/81.

[4] 罗远诠，椭圆型偏微分方程边值问题的一种数值解法，科学通报，第15期(1990年)，第1196页.

A Method for Solving the Dam Seepage Free-Bosmdary Problem

Zhan Tongsheng (Dept. Math., Dalian University)

Luo Yuanquan (Dept. of Applied Mathematics, DUT)

Abstract

In this paper, a transformation is given, which transformed the dam seepage free-boundary problem into a fixed-boundary problem of a quasi-Linear elliptic equations on a rectangular (as 2-dimension) or cubic (as 3-dimension) domain. The latter problem is solved easily to use the finite-difference method and the SOR arithmetic. The method, is given in this paper, is suitable for 2-dimension or 3-dimension and at that time there are a well.