第11卷 第4期
1991年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.4
Nov., 1991

具有非正系数的一阶中立型滞后微分方程的振动性和渐近性质*

何 学 中

（宁夏大学数学系，银川）

摘 要

本文对较文[1,2]中更为广泛的具有非正系数的一类线性方程

$$\frac{d}{dt}[x(t)+p(t)x(t-\tau)]-Q(t)x(t-\sigma(t))=0,\ t\geq t_0$$

及非线性方程

$$\frac{d}{dt}[x(t)+p(t)x(t-\tau(t))]-Q(t)f(x(t-\sigma(t)))=0,\quad t\geq t_0$$

进行了讨论，其中$Q(t)\in C([t_0,+\infty),R_+)$，得到了保证上述方程的所有有界解振动及非振动解当$t\to+\infty$时趋于零或$\pm\infty$的一些充分性准则.

Ⅰ．常系数情形 考虑方程

$$\frac{d}{dt}[x(t)+px(t-\tau)]-qx(t-\sigma)=0,\ t\geq t_0,\tag{1}$$

其中$p\in R$，$q>0,\tau>0,\sigma>0$．方程(1)相应的特征方程为

$$g(\lambda)\equiv\lambda+p\lambda e^{-\tau\lambda}-qe^{-\sigma\lambda}=0\tag{2}$$

根据文[3]之定理及$g(\lambda)$的性质，我们有如下

定理1 若(i) $p>-1$或(ii) $p<0$, $\sigma>\tau$且$-\frac{q}{p}(\sigma-\tau)>\frac{1}{e}$，则方程(1)的所有非振动解当$t\to\infty$均$\to\pm\infty$.

关于定理1中(ii)的证明可以由后面相应的线性变系数的情形而得．由$g(\lambda)$的性质可知，对任何$p\in R$, $q\in R_+$，方程(1)都存在非振动解，故在下只注重于讨论有界解的振动性及非振动解的渐近性质.

Ⅱ．线性变系数情形 考虑方程

$$\frac{d}{dt}[x(t)+p(t)x(t-\tau(t))]-Q(t)x(t-\sigma(t))=0,\quad t\geq t_0\tag{3}$$

其中$\sigma(t),\tau(t)\in C([t_0,+\infty),R_+)$，$t-\sigma(t)$及$t-\tau(t)$单调非减且当$t\to+\infty$时$\to\pm\infty$，$p(t)\in C([t_0,+\infty),R)$，$Q(t)\in C([t_0,+\infty),R_+)$且对$t\geq t_0$，$Q(t)\not\equiv0$.

定理2 对方程(3)，如果

(i) $p(t)\geq0$在$t\geq t_0$上有界，$Q(t)\geq q>0$；或

* 1989年2月1日收到．1991年7月5日收到修改稿.

(ii) $p(t)\equiv p>0$, $\sigma(t)\equiv\sigma>0$, $\tau(t)\equiv\tau>0$, $Q(t)\geq 0$ 为 τ- 周期的，则方程(3)的所有有界解是振动的．

证明 若不然，不妨设 $x(t)$ 为方程(3)的最终有界正解，即存在 $t_1\geq t_0$，使当 $t\geq t_1$ 时，$x(t)>0$，$x(t-\tau(t))>0$，$x(t-\sigma(t))>0$，且 $|x(t)|\leq C\,(>0)$． 令

$$z(t)=x(t)+p(t)x(t-\tau(t)),$$

则由方程(3)，

$$z'(t)=Q(t)x(t-\sigma(t)), \tag{4}$$

且对 $t\geq t_1$，$z'(t)\geq 0$，由 $p(t)\geq 0$，$Q(t)\not\equiv 0$ 知 $z(t)>0$，从而 $\lim\limits_{t\to+\infty}z(t)=l$，其中 $0<l\leq+\infty$．

若(i)成立，且 $l<+\infty$，则对(4)式两边从 t_1 到 t 积分，且令 $t\to+\infty$，就有

$$\int_{t_1}^{+\infty}Q(s)x(s-\sigma(s))ds<+\infty \tag{5}$$

因 $Q(t)\geq q>0$．故 $x(t)\in L_1[t_1,+\infty)$，从而 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$，由 $p(t)\geq 0$ 有界知 $\lim\limits_{t\to+\infty}z(t)=0$，此与 $l>0$ 相矛盾，故 $l=+\infty$， 而这又与 $x(t)$ 有界 从而 $z(t)$ 亦有界相矛盾，故此时定理之结论成立．

若(ii)成立且 $0<l<+\infty$，令 $w(t)=z(t)+pz(t-\tau)$，则由 $p(t)\equiv p$, $\tau(t)\equiv\tau$, $\sigma(t)\equiv\sigma$ 及方程(3)，有

$$w'(t)=Q(t)z(t-\sigma),\ t\geq t_1, \tag{6}$$

由(6)式及 $l<+\infty$ 可推知 $\lim\limits_{t\to+\infty}w(t)=l_1$，$0<l_1<+\infty$，由(6)式积分，且注意到 $\lim\limits_{t\to+\infty}z(t)=l>0$，可以得到 $\int_{t_1}^{+\infty}Q(s)ds<+\infty$，但因 $Q(t)\geq 0$ 为 τ- 周期的，从而 $\int_{t_1}^{t_1+\tau}Q(s)ds>0$，即有 $\int_{t_1}^{+\infty}Q(s)ds=+\infty$，推出矛盾，故此时定理之结论亦成立． ■

定理 3 对方程(3)，如果(i) $p(t)<0$, $Q(t)\geq q>0$, $\sigma(t)\equiv\sigma$, $\tau(t)\equiv\tau>0$, $\sigma>\tau$，且

$$\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-(\sigma-\tau)}^{t}\frac{-Q(s)}{p(s+\tau-\sigma)}ds>\frac{1}{e} \tag{7}$$

成(ii) $p(t)\equiv p>0$, $Q(t)\geq 0$ 为 τ- 周期的，$\sigma(t)\equiv\sigma$, $\tau(t)\equiv\tau$, $\sigma>\tau>0$，且

$$\varliminf_{t\to+\infty}\int_{t-(\sigma-\tau)}^{t}Q(s)ds>-\frac{p}{e},$$

则方程(3)的所有非振动解当 $t\to+\infty$ 时均趋于 $\pm\infty$；特别地，方程(3)的所有有界解是振动的．

证明 在此仅就(i)进行证明．不妨设 $x(t)$ 为方程(3)的最终正解，即存在 $t_1\geq t_0$，使当 $t\geq t_1$ 时，$x(t)>0$, $x(t-\tau)>0$, $x(t-\sigma)>0$．令 $z(t)=x(t)+p(t)x(t-\tau)$，则由方程(3)，

$$z'(t)=Q(t)x(t-\sigma),\quad t\geq t_1 \tag{8}$$

$$z'(t)+R(t)z'(t-\tau)-Q(t)z(t-\sigma)=0,\quad t\geq t_1 \tag{9}$$

其中 $R(t)=p(t-\sigma)\dfrac{Q(t)}{Q(t-\tau)}<0$，由(8)，(9)式，易见对 $t\geq t_1$，

$$z'(t)+\left[-\frac{Q(t)}{p(t+\tau-\sigma)}\right]z(t-(\sigma-\tau))>0,\quad t\geq t_1 \tag{10}$$

对上式应用文[4]之定理1 知，存在 $t_2\geq t_1$，使当 $t\geq t_2$ 时，$z(t)\geq 0$，再由 $z'(t)>0$ 知

$\lim\limits_{t\to\infty} z(t)=l$，$0<l\leq+\infty$.

若 $l<+\infty$，则由(8)式及 $Q(t)\geq q>0$ 可推出 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$，再由 $0<z(t)<x(t)$ 知 $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t)=0$，这与 $l>0$ 相矛盾，故 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=\lim\limits_{t\to\infty} z(t)=+\infty$，定理结论成立.

定理 4 对方程(3)，若 $-1<p\leq p(t)\leq 0$，$Q(t)\geq q>0$，$\tau(t)\equiv\tau>0$，则方程(3)的非振动解当 $t\to+\infty$ 时或趋于 $\pm\infty$，或趋于零.

证明 不妨设 $x(t)$ 为方程(3)的最终正解，即存在 $t_1\geq t_0$，使当 $t\geq t_1$ 时，$x(t)>0$，$x(t-\tau)>0$，$x(t-\sigma(t))>0$，令 $z(t)=x(t)+p(t)x(t-\tau)$，则由方程(3)，

$$z'(t)=Q(t)x(t-\sigma(t)),\qquad t\geq t_1 \tag{11}$$

且对 $t\geq t_1$，$z'(t)>0$，从而 $z(t)$ 必最终定号.

设 $z(t)$ 最终为正，则存在 $t_2\geq t_1$，使当 $t\geq t_2$ 时，$z(t)>0$，由 $z'(t)>0$ 知 $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t)=l$，$0<l\leq+\infty$. 若 $l<+\infty$，则由(1)式及 $Q(t)\geq q>0$ 可推知 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=0$，又由 $0<z(t)<x(t)$，所以 $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t)=0$，与 $l>0$ 矛盾，故 $l=+\infty$，从而 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=+\infty$.

若 $z(t)$ 最终为负，即存在 $t_2\geq t_1$，使当 $t\geq t_2$ 时，$z(t)<0$，即

$$x(t)<-p(t)x(t-\tau)\leq(-p)x(t-\tau),$$

从而对 $t\in[t_2-\tau,t_2]$，$n=1,2,\cdots$，$\{x(t+n\tau)\}_1^n$ 满足：$x(t+n\tau)<x(t+(n-\tau)\tau)$，$x(t+n\tau)<(-p)^n x(t)$，由 $-p<1$ 知对任意 $t\in[t_2-\tau,t_2]$，$\lim\limits_{n\to+\infty} x(t+n\tau)=0$，即 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=0$，故定理之结论成立.

Ⅲ. 非线性情况 考虑方程

$$\frac{d}{dt}[x(t)+p(t)x(t-\tau(t))]-Q(t)f(x(t-\sigma(t)))=0,\quad t\geq t_0 \tag{12}$$

除了Ⅱ中所设外，又设 $f\in C(R,R)$，$f(x)$ 关于 x 非减，且 $xf(x)>0$ $(x\neq 0)$.

完全类似于情形Ⅱ. 应用文[4]之定理4，可知有如下结论成立.

定理 5 若 $p(t)\geq 0$ 有界，$Q(t)\geq q>0$，且 $f(x)=0$ 当且仅当 $x=0$. 则方程(12)的所有有界解是振动的.

定理 6 若(i) $\tau(t)\equiv\tau>0$，$\sigma(t)\equiv\sigma$，$\sigma>\tau$，$p(t)<0$，$Q(t)\geq q>0$，$f(x)=0$ 当且仅当 $x=0$；或 (i)′ $\tau(t)\equiv\tau>0$，$\sigma(t)\equiv\sigma>0$，$p(t)\leq-1$，$\int_{t_0}^{+\infty}Q(t)dt=+\infty$，$\sigma>\tau$；

(ii) $f(-x)=-f(x)$，对 $xv>0$，$f(xv)\leq kf(x)f(v)$，其中 $k>0$ 为常数；

(iii) $\lim\limits_{u\to 0} x/f(x)=M<+\infty$；

(iv) $\underline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\int_{t-(\sigma-\tau)}^{t}\dfrac{-Q(s)}{kf(p(s+\tau-\sigma))}ds>\dfrac{M}{e}$，或

(iv)′ $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\int_{t-(\sigma-\tau)}^{t}\dfrac{-Q(s)}{kf(p(s+\tau-\sigma)}ds>M$，

则方程(12)的所有非振动解当 $t\to+\infty$ 时趋于 $\pm\infty$.

定理 7 对方程(12)，若 $\tau(t)\equiv\tau>0$，$-1<p\leq p(t)<0$，$Q(t)\geq q>0$，$f(u)=0$ 当且仅当 $u=0$. 则方程(12)的所有非振动解当 $t\to+\infty$ 时或趋于零或趋于 $\pm\infty$.

参考文献

[1] Ladas. G and Sficas. Y. G, Oscillations of neutral delay differential equations, Canad. Math. Bull., 29(4), (1984), 438—445.

[2] Grammatikopoulos. M. K, Grove. E. A and Ladas G, Oscillations of first order neutral delay differential equations, J. Math. Anal. Appl., 120(1986), 510—520.

[3] Grove. E. A, Ladas. G and Meimaridou. A, A necessary and sufficient condition for the oscillation of neutral equations, J. Math. Anal. Appl., 126(1987), 341—354.

[4] Zhong. B. G, A survey of oscillation of solutions to first order differential equations with deviating arguments, Ann. of Diff. Equs., 2(1), 1986, 65—86.

Oscillatory and Asymptotic Properties of First Order Delay Neutral Differential Equations with Nonpositive Coefficients

He Xuezhong

(Ningxia University)

Abstract

In this paper, we deal with the osicllatory and asymptotic properties of the solutions for the neutral delay differential equations

$$\frac{d}{dt}[x(t)+p(t)x(t-\tau(t))]-Q(t)x(t-\sigma(t))=0, \qquad t\geq t_0$$

and

$$\frac{d}{dt}[x(t)+p(t)x(t-\tau(t))]-Q(t)f(x(t-\sigma(t)))=0, \quad t\geq t_0,$$

where $p(t)\in C([t_0,+\infty),R)$, $Q(t)\in C([t_0,+\infty),R_+)$, $\tau(t)$, $\sigma(t)\in C([t_0,+\infty),R_+)$, $f\in C(R,R)$, $f(u)u>0$ $(u\neq 0)$. Some sufficient Conditions which keep all the bounded solutions oscillating and all the solutions tending to zero or $\pm\infty$(as $t\to+\infty$) are obtained.