第11卷 第4期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.11 No.4
1991年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov., 1991

中立型时滞大系统于C_1空间中稳定的一种新的分解方法*

谢 胜 利

（荆州师范专科学校，湖北）

关于中立型大系统的稳定性研究，虽然难度较大，但在人们的共同努力下，也获得了一些有价值的结果[1—6]．本文对时变中立型大系统的稳定性进行了讨论，给出了与已有方法不同的另外一种分解方法．获得了时变中立型大系统于C_1空间中稳定．渐近稳定的新判据．

考虑时变中立型大系统：

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{j=1}^{N}A_{ij}(t)x_j(t)+\sum_{j=1}^{N}B_{ij}(t)x_j(t-\tau)+\sum_{j=1}^{N}C_{ij}(t)\dot{x}_j(t-\tau),\ i=1,\cdots,N \qquad (1)$$

其中 $A_{ij}(t),B_{ij}(t),C_{ij}(t)$ 是 $n_i\times n_j$ 阶时变矩阵，$x_i\in R^{n_i}$，$\sum\limits_{i=1}^{N}n_i=n$，时滞 $\tau\geq 0$.

定理1 若系统（1）满足

$$\|Q_{ij}(t)\|+\|R_{ij}(t)\|+\int_{t_0}^{t}[\|\Phi_i(t,s)P_{ij}(s)\|\delta_{ij}^*+\|\Phi_i(t,s)(\dot{Q}_{ij}(s)-P_{ii}(s)Q_{ij}(s))\|$$
$$+\|\Phi_i(t,s)(\dot{R}_{ij}(s)-P_{ii}(s)R_{ij}(s))\|]ds\leq m_{ij}$$

而矩阵 $M=\{m_{ij}\}_{N\times N}$ 的谱半径 $\rho(M)<1$，则中立型大系统（1）的零解于C_1空间中是稳定的，若还有 $\lim\limits_{t\to\infty}\|\Phi_i(t,t_0)\|=0$，则中立型大系统（1）的零解于$C_1$空间中是渐近稳定的．其中

$$\delta_{ij}^*=\begin{cases}0, & j=i\\ 1, & j\neq i\end{cases}\quad 且$$

$$P_{ij}(t)=\begin{bmatrix}A_{ij}(t)+B_{ij}(t) & C_{ij}(t)\\ \dot{A}_{ij}(t)+\dot{B}_{ij}(t)+\sum\limits_{k=1}^{N}A_{ik}(A_{kj}(t)+B_{kj}(t)) & \sum\limits_{k=1}^{N}A_{ik}C_{kj}(t)+B_{ij}(t)+\dot{C}_{ij}(t)\end{bmatrix}$$

$$Q_{ij}(t)=\begin{bmatrix}\tau B_{ij}(t) & 0\\ \tau(\dot{B}_{ij}(t)+\sum\limits_{k=1}^{N}A_{ik}(t)B_{kj}(t)) & -C_{ij}(t)\end{bmatrix}$$

$$R_{ij}(t)=\begin{bmatrix}0 & \tau C_{ij}(t)\\ 0 & \tau(\sum\limits_{k=1}^{N}A_{ik}(t)C_{kj}(t)+B_{ij}(t)+\dot{C}_{ij}(t))\end{bmatrix}$$

而 $\Phi_i(t,s)$ 是系统 $\dot{y}_i(t)=P_{ii}(t)y_i(t)$ 的基本矩阵．

证明 首先注意

* 1989年12月4日收到．1991年6月24日收到修改稿．

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(t)\sum_{k=1}^{N} A_{jk}(t)x_k(t)=\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{N} A_{im}(t)A_{mj}(t)\right)x_j(t)$$

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(t)\sum_{k=1}^{N} B_{jk}(t)x_k(t-\tau)=\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{N} A_{im}(t)B_{mj}(t)\right)\dot{x}_j(t-\tau)$$

由系统(1)我们可得

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{j=1}^{N}(A_{ij}(t)+B_{ij}(t))x_j(t)-\tau\sum_{j=1}^{N} B_{ij}(t)\dot{x}_j(t-l_j\tau)+\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(t)\dot{x}_j(t)$$
$$-\tau\sum_{j=1}^{N} C_{ij}(t)\ddot{x}_j(t-h_j\tau). \tag{2}$$

$$\ddot{x}_i(t)=\sum_{j=1}^{N}\left[\dot{A}_{ij}+\dot{B}_{ij}+\sum_{m=1}^{N} A_{im}(A_{mj}+B_{mj})\right]x_j(t)$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{N} A_{im}C_{mj}+B_{ij}+\dot{C}_{ij}\right)\dot{x}_j(t)-\tau\sum_{j=1}^{N}\left(\dot{B}_{ij}+\sum_{m=1}^{N} A_{im}B_{mj}\right)\dot{x}_j(t-l_j\tau)$$
$$-\tau\sum_{j=1}^{N}\left(B_{ij}+\dot{C}_{ij}+\sum_{m=1}^{N} A_{im}C_{mj}\right)\ddot{x}_j(t-h_j\tau)+\sum_{j=1}^{N} C_{ij}\ddot{x}_j(t-\tau) \tag{3}$$

由(2)和(3)，我们可得

$$\dot{u}_i(t)=P_{ii}(t)u_i(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} P_{ij}(t)u_j(t)-\sum_{j=1}^{N} Q_{ij}(t)\dot{W}_j(t)-\sum_{j=1}^{N} R_{ij}(t)\dot{Z}_j(t), \tag{4}$$

其中 $\dot{u}_i(t)=[x_i^T(t),\ \dot{x}_i^T(t)]^T$；$W_i(t)=[\dot{x}_i^T(t-l_i\tau),\ \ddot{x}_i^T(t-\tau)]^T$；$Z_i(t)=[\dot{x}_i^T(t-\tau),\ \ddot{x}_i^T(t-h_i\tau)]^T$。

但是，我们可得

$$Q_{ij}(t)\dot{W}_j(t)=\Phi_i(t,t_0)[\Phi_i^{-1}(t,t_0)Q_{ij}(t)W_j(t)]'-(\dot{Q}_{ij}(t)-P_{ii}(t)Q_{ij}(t))W_j(t),$$
$$R_{ij}(t)\dot{Z}_j(t)=\Phi_i(t,t_0)[\Phi_i^{-1}(t,t_0)R_{ij}(t)Z_j(t]'-(\dot{R}_{ij}(t)-P_{ii}(t)R_{ij}(t))Z_j(t)$$

则(4)可化为

$$\dot{u}_i(t)=P_{ii}(t)u_i(t)+\sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{N} P_{ij}(t)u_j(t)-\sum_{j=1}^{N}\Phi_i(t,t_0)[(\Phi_i^{-1}(t,t_0)Q_{ij}(t)W_j(t))'$$
$$+(\Phi_i^{-1}(t,t_0)R_{ij}(t)Z_j(t))']+\sum_{j=1}^{N}[(\dot{Q}_{ij}(t)-P_{ii}(t)Q_{ij}(t))W_j(t)$$
$$+(\dot{R}_{ij}(t)-P_{ii}(t)R_{ij}(t))Z_j(t)] \tag{5}$$

再注意

$$\|W_i(t)\|=\|[x_i^T(t-l_i\tau),\dot{x}_i^T(t-\tau)]^T\|\leq\sup_{t_0-\tau\leq s\leq t}\|[x_i^T(s),\dot{x}_i^T(s)]^T\|\triangleq v_i(t)$$
$$\|Z_i(t\|=\|[x_i^T(t-\tau),\dot{x}_i^T(t-h_i\tau)]^T\|\leq\sup_{t_0-\tau\leq s\leq t}\|[x_i^T(s),\dot{x}_i^T(s)]^T\|$$

由(5)我们可推得

$$\|u_i(t)\|\leq k\sum_{j=1}^{N} L_{ij}v_j(t_0)+\sum_{j=1}^{N} m_{ij}v_j(t) \tag{6}$$

其中 $L_{ij}=\delta_{ij}+\|Q_{ij}(t_0)\|+\|R_{ij}(t_0)\|$，$\|\Phi_i(t,t_0)\|\leq k$．因为 $v_i(t)=\sup_{t_0-\tau\leq s\leq t}\|u_i(s)\|$ 是不减的，从(6)可推得

$$V(t)\leq kLV(t_0)+MV(t) \tag{7}$$

其中 $V(t)=[v_1(t),\cdots,v_N(x)]^T$，$L=\{L_{ij}\}_{N\times N}$. 因 $\rho(M)<1$，则由[7]知，矩阵 $(I-M)^{-1}$ 存在，从而

$$V(t)\leq(I-M)^{-1}kLV(t_0) \tag{8}$$

从而

$$\begin{aligned}&[\|[x_1^T(t),\dot{x}_1^T(t)]^T\|,\cdots,\|[x_N^T(t),\dot{x}_N^T(t)]^T\|]^T\leq[\|u_1(t)\|,\cdots,\|u_N(t)\|]^T\\ &\leq[v_1(t),\cdots,v_N(t)]^T\leq(I-M)^{-1}kL\sup_{t_0-\tau\leq s\leq t_0}[\|[x_1^T(s),\dot{x}_1^T(s)]^T\|,\\ &\cdots,\|[x_N^T(s),\dot{x}_N^T(s)]^T\|]^T.\end{aligned}$$

则系统(1)的零解于 C_1 空间中是稳定的.

再由 $\lim\limits_{t\to\infty}\|\Phi_i(t,t_0)\|=0$，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $T>0$，当 $t>T$ 时有

$$\|\Phi_i(t,t_0)\|\leq\frac{\varepsilon}{\|(I-M)^{-1}LV(t_0)\|}\triangleq\varepsilon_1$$

从前面的有关推导中，可得到

$$\|u_i(t)\|\leq\varepsilon_1\sum_{j=1}^{N}L_{ij}v_j(t_0)+\sum_{j=1}^{N}m_{ij}v_j(t) \tag{9}$$

同前面一样，可得 $V(t)\leq\varepsilon_1(I-M)^{-1}LV(t_0)$，则

$$\|V(t)\|\leq\varepsilon_1\|(I-M)^{-1}LV(t_0)\|=\varepsilon \tag{10}$$

由此可得

$$\lim_{t\to\infty}[\|[x_1^T(t),\dot{x}_1^T(t)]^T\|,\cdots,\|[x_N^T(t),\cdots,\dot{x}_N^T(t)]^T\|]^T=0,$$

即系统(1)的零解于 C_1 空间中是渐近稳定的.

定理 2 若系统(1)满足

$$\begin{aligned}&\|Q_{ij}^*(t)\|+\|R_{ij}^*(t)\|+\int_{t_0}^{t}[\|\Phi_i^*(t,s)P_{ij}^*(s)\|\delta_{ij}^*+\|\Phi_i^*(t,s)(\dot{Q}_{ij}^*(s)-P_{ii}^*(s)Q_{ij}^*(s))\|\\ &+\|\Phi_i^*(t,s)(\dot{R}_{ij}^*(s)-P_{ii}^*(s)R_{ij}^*(s)\|]\mathrm{d}s\leq m_{ij}^*\end{aligned}$$

且矩阵 $M^*=\{m_{ij}^*\}_{N\times N}$ 的谱半径 $\rho(M^*)<1$，则系统(1)的零解于 C_1 空间中是稳定的；若 $\lim\limits_{t\to\infty}\|\Phi_i^*(t,t_0)\|=0$，则系统(1)的零解于 C_1 空间中是渐近稳定的. 其

$$P_{ij}^*(t)=\begin{bmatrix}A_{ij}(t)+B_{ij}(t) & C_{ij}(t)\\ \dot{A}_{ij}(t)+\dot{B}_{ij}(t) & A_{ij}(t)\end{bmatrix};\quad Q_{ij}^*=\begin{bmatrix}\tau B_{ij}(t) & 0\\ \tau\dot{B}_{ij}(t) & -C_{ij}(t)\end{bmatrix};\quad R_{ij}^*(t)=\begin{bmatrix}0 & -\tau C_{ij}(t)\\ B_{ij}(t)+\dot{C}_{ij} & 0\end{bmatrix}$$

$\Phi_i^*(t,s)$ 是系统 $\dot{y}_i(t)=P_{ii}^*(t)y_i^*(t)$ 的基本矩阵.

证明 由(1)可得到

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_i(t)\\ \ddot{x}_i(t)\end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{N}\Bigg\{&\begin{bmatrix}A_{ij}(t)+B_{ij}(t) & C_{ij}(t)\\ \dot{A}_{ij}(t)+\dot{B}_{ij}(t) & A_{ij}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_j(t)\\ \dot{x}_j(t)\end{bmatrix}\\ &-\begin{bmatrix}\tau B_{ij}(t) & 0\\ \tau\dot{B}_{ij}(t) & -C_{ij}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_j(t-l_j\tau)\\ \ddot{x}_j(t-\tau)\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}0 & -\tau C_{ij}(t)\\ B_{ij}(t)+\dot{C}_{ij}(t) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_j(t-\tau)\\ \ddot{x}_j(t-h_j\tau)\end{bmatrix}\Bigg\}\end{aligned}$$

$$= P_{ii}^{*}(t)\begin{bmatrix} x_i(t) \\ \dot{x}_i(t) \end{bmatrix} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{N} P_{ij}^{*}(t)\begin{bmatrix} x_j(t) \\ \dot{x}_j(t) \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^{N} Q_{ij}^{*}(t)\begin{bmatrix} \dot{x}_j(t-l_j\tau) \\ \ddot{x}_j(t-\tau) \end{bmatrix}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} R_{ij}^{*}(t)\begin{bmatrix} \dot{x}_j(t-\tau) \\ \ddot{x}_j(t-h_j\tau) \end{bmatrix} \tag{11}$$

剩下的只要完全重复定理 1 的有关推导即可.

参 考 文 献

[1] 廖晓昕, 中国科学(A辑), 1985, 9:784—798.

[2] 章毅, 中国科学(A辑), 1988, 4:337—347.

[3] 谢胜利, 科学通报, 32(1987), 12:891—896.

[4] 徐道义, 控制论与常微分方程讨论文论文集, 华中师大出版社, 1988, 206—215.

[5] 谢胜利, 数学年刊, 11(1990), 2:164—171.

[6] 谢胜利, 应用数学, 4(1991), 2:106—108.

[7] 廖晓昕等译, 动力系统的稳定性, 华中工学院出版社, 1983.

A new Decomposition Method of C_1-Stability of Large-Scale Neutral Type System with Time-Delay

Xie Shengli

(Depa. Math. Jingzhou Teacher's College, Hubei)

Abstract

In this paper, we discuss the C_1-stability of the large-scale neutral type system with time-delay, we give a new decomposition method and get some new sufficient condition of the C_1-stability. Thus find a new approach to the problem.