

评北师大现代数学丛书之一《函数逼近论》*

徐 利 治

(大连理工大学应用数学研究所)

(一)

北京师范大学出版社于1989年出版了《函数逼近论》一书。全书分两册，上册6章孙永生著，下册4章孙永生与房良孙合著。总篇幅累计达1190余页，堪称一部巨著。本文将对此书简称《逼近论》作一简短评介。

如所知，函数逼近论研究在中国已有40多年历史。由于它是数值分析与计算方法的理论基础，一贯受到重视。现今全国已有好几个博士点。北师大数学系就是国内培养逼近论科研人才的基地之一。博士生导师孙永生教授30多年前从苏联留学归国后，始终致力于函数构造论研究和培育人才的工作。他和弟子们在有关方向的一系列优异成果，在国内国外都是居于前列的。所以《逼近论》一书，可以看作是他们多年来工作成就的总结。这一著作是国家自然科学基金资助的项目。

(二)

不难发现，《逼近论》一书很有些特色。首先是，书中有一篇高水平的前言。它遵循历史发展的观点，提纲揭领地点明了所论主题的来龙去脉，并概述了全书的基本内容。特别声明该书内容并非自给自足，故需要建议读者去参考A. Pinkus和H. Л. Корнейчук的三本名著。其次是，书中不惜巨大篇幅，非常细致地、系统地介绍了现代逼近论发展中两个极重要的新方向——“宽度论”与“最优回复论”。事实上，对这些新方向作如此全面深入的论述，在国内外尚未见到先例。此外，书中述及和引用的参考文献资料相当广泛而丰富。尤其是，大量简明的注记及评注，无疑对研究生、教师和研究人員都很有参考价值。最后一点，也是全书最可贵的特色，就是概述了国内学者们多年来在有关方向上的许多出色成果，包括著者孙永生、房良孙和他们的合作者黄达人等人在宽度估计和最优求积公式等方面的一系列成果。我认为，从这些成果概述中，能够清楚地看到，以孙永生为代表的北师大逼近论研究集体，多年来努力继承和发展了苏联函数构造论学派的传统优势之后，确实已经在中国结出丰盛硕果，并引起国际同行的注意。

(三)

《逼近论》10章的标题依次为（其中一、二两章为同一标题）：一、二、线性赋范空间内

* 1990年2月26日收到。

的最佳逼近问题(I)(II), 三、最佳逼近的定量理论, 四、卷积类上的逼近, 五、线性赋范空间内点集的宽度, 六、 \mathcal{C}^r -样条的极值性质, 七、某些周期卷积类的宽度估计, 八、全正核的宽度问题, 九、最优回复通论, 十、最优求积公式。

前四章主要是讨论实变函数逼近论的经典问题。从这里读者可以领会到泛函分析的观点和方法, 特别是“对偶定理”这一有力工具是如何在逼近论古典题材的处理上起到重要作用的。

在有关多项式最佳逼近的综合介绍中, 还提到了国内一批学者(包括蒋铎、蒋迅、王兴华、余祥明、李武、杨义群、谢庭藩、孙永生等人)的一系列工作成果。文献出处可从二、三、四各章中找到。

后六章是全书的重点所在。主要内容是“宽度论”、“最优回复论”和一个具体研究专题——“最优求积公式”。由于现代计算数学与数值分析都需要选用最优的“离散化方案”和在一定的已知信息基础上寻求“最优算法”, 因此50年前由A. N. Kolmogorov创始的“宽度论”和50年代初出现的“最优回复论”便很自然地成为当今逼近论研究的活跃领域。《逼近论》以此作为重点论述客观上是反映时代主流的。

宽度论中的各种宽度精估问题和最优回复论中的许多问题(例如最优求积公式的存在性与构造问题), 都归结为“极值问题”。这样就需要动用若干现代数学工具才可能解决问题。例如, 关于周期卷积类上的宽度估计问题的一些精美成果, 就是借助于 Корнейчук的 Σ 重排技巧和Borsuk定理以及拓扑度等现代分析工具才能取得的。《逼近论》的后六章, 除了提供大量系统性的理论知识和有用信息之外, 在一系列定理的证明中还展示了现代分析工具(包括拓扑与泛函)的灵活运用方式。无疑, 这对于训练初学者逐步进入研究领域是很有帮助的。

这里值得提及的是, 孙永生、黄达人与房良孙所建立的某些周期卷积类上宽度估计的精确结果, 大大拓展了苏联学派和Pinkus等外国学者的工作, 确实具有深刻的理论意义和价值。此外, 还有不少国内同行们(如李淳、陈翰麟、贾荣庆、王建忠、翁心龙、唐旭辉、何明均等)的工作成果, 也都在该书的有关部分提到了。

(四)

总的来说, 《逼近论》的写作风格是严谨的, 清晰的, 表述形式的条理性也很强; 故对于教师和研究人员来说, 确实是一部便于查阅的工具书和参考书。稍嫌不足的是, 书中陈述大量定理的证明过程, 未能随时揭示难点关键所在, 并点明克服困难的必由之途。这样对于年轻的初学者就缺少一些启发性。但是这部巨著的特色是主要的, 而且内容题材充分反映了现代研究主流和最新成果, 故值得建议将各章题材经过再次提炼后, 译成英文出版发行, 以便于对外交流。