第11卷 第4期
1991年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.4
Nov., 1991

关于S.Axler的一个猜想的注记*

娄增建
（山东曲阜师范大学数学系，曲阜）

设 $u(z)$ 为 $D:|z|<1$ 内的实值调和函数，$a>-1$，$0<p,q<\infty$，若

$$\int_0^1(1-r)^a M_p(r,u))^q\mathrm{d}r<\infty$$

这里
$$M_p(r,u)=(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta)^{1/p}$$

则称 $u\in a^{p,q,a}$. $p=q$，$a=0$ 时称 $u\in a^p$.

用 $\widetilde{u}(z)$ 表示 $u(z)$ 的调和共轭函数．若 $u\in a^{p,q,a}$，有 $\widetilde{u}\in a^{p,q,a}$，称 $a^{p,q,a}$ 为自共轭的．[1]在1974年证明 $a^p(1\leq p<\infty)$ 为自共轭的．1985年S. Axler在[2]中猜测 $a^p(0<p<1)$ 也是自共轭的．本短文用极简单的方法证明 $a^{p,q,a}(0<p,q<\infty,a>-1)$ 为自共轭的，从而肯定S. Axler的猜想．同时给出一个比[1]简单得多的证明．

引理 设 $f(z)$ 为 D 内的解析函数，$0<p,q<\infty$，$a>-1$，则

$$\int_0^1(1-r)^a M_p(r,f)^q\mathrm{d}\gamma\leq C\int_0^1(1-r)^{a+q}M_p(r,f')^q\mathrm{d}\gamma$$

这里及后面的 C 表示只与 $p,q,a,\cdots$ 有关的正常数，不同地方的 C 的值可能不同．

证明 在[3]的定理6(i)中令 $\gamma=\frac{a+1}{q}$，$\beta=\frac{a+1}{q}+1$，结合[4, p. 179, 1.5(3)]即得．

定理 若 $0<p,q<\infty$，$a>-1$，则 $a^{p,q,a}$ 为自共轭的．

证明 设 $u\in a_{p,q,a}$，令 $f(z)=u(z)+i\widetilde{u}(z)$，若 $0<p<1$，在[3]的定理8(iii)中取 $\gamma=\frac{a+1}{q}$ 得

$$\int_0^1(1-r)^{a+q}M_p(r,f')^q\mathrm{d}r\leq C\int_0^1(1-r)^a M_p(r,u)^q\mathrm{d}r<\infty$$

再由引理

$$\int_0^1(1-r)^a M_p(r,\widetilde{u})^q\mathrm{d}r\leq\int_0^1(1-r)^a M_p(r,f)^q\mathrm{d}r<\infty$$

若 $1\leq p<\infty$．由[5, p. 83]

$$M_p(r,f')\leq C(1-r)^{-1}M_p(\frac{1+r}{2},u)$$

再据引理即得

* 1989年11月14日收到．

$$\int_0^1(1-r)^a M_p(r,\widetilde{u})^q\mathrm{d}r\le\int_0^1(1-r)^a M_p(r,f)^q\mathrm{d}r$$
$$\le C\int_0^1(1-r)^{a+q}M_p(r,f')^q\mathrm{d}r\le C\int_0^1(1-r)^a M_p\left(\frac{1+r}{2},u\right)^q\mathrm{d}r$$
$$\le C\int_{\frac{1}{2}}^1(1-r)^a M_p(r,u)^q\mathrm{d}r<\infty$$

推论 $a^p(0<p<1)$ 为自共轭的.

感谢导师李琼瑶副教授的指导.

参 考 文 献

[1] Forelli, F. and Rudin, W. Projections on Spaces of Holomorphic Function in Balls, Indiana Univ. Math. J. 24 (1974) 593—602.

[2] Axler, S., Bergman Spaces and Their Operators, Lecture at Sichuan Univ. China, 1985.

[3] Flett, T. M., The Dual of an Inequality of Hardy and Littlewood and Some-Related Inequalities, J. Math. Anal. Appl. 38 (1922), 746—765.

[4] Kim, H. O., Derivatives of Blaschke Products, Pacif. J. Math. 114 (1984), 175—190.

[5] Duren, P. L., Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York, 1970.

A note on a conjecture of S. Axler

Lou Zengjian

(Math. Dept., Qufu Nornal Univ.)

In this note, we prove that $a^{p,q,a}(0<p, q<\infty, a>-1)$ is a self-conjugate spacl, so $a^p\ (=a^{p,p,0})$ is self-conjugate, in other words, we prove that the conjecture of S. Axler istrue.