第15卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 15 No. 1
1995年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1995

模糊集的基数与连续统假设*

李洪兴　　罗承忠　　汪培庄
(北京师范大学数学系，100875)

摘　要　本文在模糊映射[1]的基础上给出了模糊集基数的定义，它把普通集的基数作为特款；不但得到有关基数的大部分结论，而且有其自身的特殊性质；特别，对于连续统假设这一世界难题可能有新的启示.

关键词　模糊映射，F基数，连续统假设.
分类号　AMS(1991) 94D05/CCL O159

§1　模糊集之间的映射

熟知，关系、映射、基数与序数是集合论的精髓，然而这些基本内容在模糊集论中并未得到很好的研究，主要困难在于如何给它们恰当的定义并把普通集论的情况作为特款. 特别，有关模糊集基数的研究进展甚微；D. Dubois 和 H. Prade 曾在[5]中对有限支集的模糊集以及附加苛刻条件的无限模糊集给出过一种定义，但正如本文将要指出的那样，该定义是不合理的. 文[1]给出了模糊映射的定义，基于模糊映射，文[2]给出了模糊集基数的一般性定义，本文将讨论这种基数的性质以及它对连续统假设所带来的启示. 下面先介绍模糊集之间的映射及有关的基本概念.

给定一族 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{A}^{(t)}\in\mathscr{F}(X_t)\ (t\in T)$，记

$$\prod_{t\in T}\underset{\sim}{A}^{(t)}\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda\Big(\prod_{t\in T}A_\lambda^{(t)}\Big)$$

称之为 $\{\underset{\sim}{A}^{(t)}\}_{t\in T}$ 的直积或卡氏积. 设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(Y)$，若 $\underset{\sim}{R}\subset\underset{\sim}{A}\times\underset{\sim}{B}$，则称 $\underset{\sim}{R}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 到 $\underset{\sim}{B}$ 的 Fuzzy 关系. 记

$$\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{A}}\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(R_\lambda)_{A_\lambda},\quad \underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{B}}\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(R_\lambda)_{B_\lambda},$$

分别称为 $\underset{\sim}{R}$ 在 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 中的投影. $\forall\ x_\gamma\in\underset{\sim}{A}$，$y_\eta\in\underset{\sim}{B}$，记

$$\underset{\sim}{R}|_{x_\gamma}\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda R_\lambda|_{(x_\gamma)_\lambda},\quad \underset{\sim}{R}|_{y_\eta}\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda R_\lambda|_{(y_\eta)_\lambda},$$

分别称为 $\underset{\sim}{R}$ 在 Fuzzy 点 x_γ 和 y_η 处的截影.

定义 1.1　设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$，$\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(Y)$，称 Fuzzy 关系 $\underset{\sim}{f}\subset\underset{\sim}{A}\times\underset{\sim}{B}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 到 $\underset{\sim}{B}$ 的 Fuzzy 映射，如果 $(\forall\ \lambda\in[0,1])(f_\lambda$ 是 A_λ 到 B_λ 的映射)；当 $\underset{\sim}{f}$ 是 $\underset{\sim}{A}$ 到 $\underset{\sim}{B}$ 的 Fuzzy 映射时，记为 $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$. 称 $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{A}$

* 1992年3月22日收到. 94年4月14日收到修改稿. 国家自然科学基金资助项目.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

$\to \underset{\sim}{B}$ 为 Fuzzy 单射，如果$(\forall\ \lambda\in[0,1])(f_\lambda$ 是 A_λ 到 B_λ 的单射)；称 $\underset{\sim}{f}$ 为 Fuzzy 满射，如果$(\forall\ \lambda\in[0,1])(B_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subset f_\lambda(A_\lambda)\subset B_\lambda)$；称 $\underset{\sim}{f}$ 为 Fuzzy 双射，如果 $\underset{\sim}{f}$ 既单又满.

关于 Fuzzy 映射，我们有下面基本结论[1]：

1. $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}\Rightarrow(\forall\ \lambda\in[0,1])(f_\lambda=f_{\underset{\cdot}{0}}|_{A_\lambda},f_{\underset{\cdot}{\lambda}}=f_{\underset{\cdot}{0}}|_{A_{\underset{\cdot}{\lambda}}})$；

2. $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}\Rightarrow(\exists\ f:A_{\underset{\cdot}{0}}\to B_{\underset{\cdot}{0}})(f(\underset{\sim}{A})\subset\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{f}=(\underset{\sim}{A}\times Y)\cap f)$；

3. 设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X),\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(Y)$，若 $\underset{\sim}{f}\in\mathscr{F}(X\times Y)$，则 $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$ 当且仅当 $\underset{\sim}{f}$ 满足条件：

(a) $\underset{\sim}{f}_X=\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{f}_Y\subset\underset{\sim}{B}$；

(b) $(\forall\ x\in A_{\underset{\cdot}{0}})(f_{\underset{\cdot}{0}}=\{f_{\underset{\cdot}{0}}(x)\}$为单点集)；

(c) $(\forall\ x\in A_{\underset{\cdot}{0}})(\underset{\sim}{f}|_x=(f_{\underset{\cdot}{0}}(x))_{A(x)}\in\underset{\sim}{B})$.

4. $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$ Fuzzy 单射$\Leftrightarrow f_{\underset{\cdot}{0}}:A_{\underset{\cdot}{0}}\to B_{\underset{\cdot}{0}}$ 单射；

5. $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$ Fuzzy 满射$\Leftrightarrow f_{\underset{\cdot}{0}}(\underset{\sim}{A})=\underset{\sim}{B}$；

6. $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$ 为 Fuzzy 双射$\Leftrightarrow(\forall\ x\in A_{\underset{\cdot}{0}})(\underset{\sim}{A}(x)=\underset{\sim}{B}(f_{\underset{\cdot}{0}}(x)))$；

7. $\underset{\sim}{f}$ 是 $\underset{\sim}{A}$ 到 $\underset{\sim}{B}$ 的 Fuzzy 映(单，满，双)射$\Leftrightarrow(\forall\ \lambda\in[0,1))(f_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 是 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 到 $B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 的映(单，满，双)射).

定义 1.2 设 $\underset{\sim}{f}:\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{A'}\subset\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B'}\subset\underset{\sim}{B}$，记

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{A'})\overset{\triangle}{=}\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_\lambda(A'_\lambda),\quad \underset{\sim}{f}^{-1}(\underset{\sim}{B'})\overset{\triangle}{=}\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_\lambda^{-1}(B'_\lambda),$$

称 $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{A'})$为 $\underset{\sim}{A'}$ 在 $\underset{\sim}{f}$ 之下的象，称 $\underset{\sim}{f}^{-1}(\underset{\sim}{B'})$为 $\underset{\sim}{B'}$ 在 $\underset{\sim}{f}$ 之下的完全原象. 当 $\underset{\sim}{f}$ 为 Fuzzy 双射时，显然 $\underset{\sim}{f}^{-1}$ 亦为 Fuzzy 双射，称之为 $\underset{\sim}{f}$ 的逆映射.

关于 $\underset{\sim}{f}^{-1}$ 还有下列结论：

8. $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{A'})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_{\underset{\cdot}{0}}(A'_\lambda)$，$\underset{\sim}{f}^{-1}(\underset{\sim}{B'})=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f_{\underset{\cdot}{0}}^{-1}(B'_\lambda)$；

9. $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{A'})(y)=\bigvee_{f_{\underset{\cdot}{0}}(x)=y}\underset{\sim}{A'}(x)$，$\underset{\sim}{f}^{-1}(\underset{\sim}{B'})(x)=\underset{\sim}{B'}(f_{\underset{\cdot}{0}}(x))$.

§2 模糊集的基数

定义 2.1 设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X),\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(Y)$，若存在 $\underset{\sim}{A}$ 到 $\underset{\sim}{B}$ 的 Fuzzy 双射，则称 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 等势，记为 $\underset{\sim}{A}\sim\underset{\sim}{B}$. 显然等势关系是等价关系(见上面基本结论第六条). 按等势关系将 Fuzzy 集分类，$\underset{\sim}{A}$ 所在的等价类称为 $\underset{\sim}{A}$ 的势或基数，记作$|\underset{\sim}{A}|$. Fuzzy 集的基数简称为 F 基数.

关于 F 基数我们有下面的基本结论[2,3]：

1. 设 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X),\underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}(Y)$，若 $A_{\underset{\cdot}{0}}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},B_{\underset{\cdot}{0}}=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$均有限，则下列条件等价：

(a) $\underset{\sim}{A}\sim\underset{\sim}{B}$；

(b) $A_{\underset{\cdot}{0}}\sim B_{\underset{\cdot}{0}}$ 且存在 n 元置换 σ 使得$(\forall\ i)(\underset{\sim}{A}(x_i)=\underset{\sim}{B}(y_{\sigma(i)}))$；

(c) $(\forall\ \lambda\in[0,1])(A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\sim B_{\underset{\cdot}{\lambda}})$；

(d) $(\forall\ \lambda\in(0,1])(A_\lambda\sim B_\lambda)$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

2. 设 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 为支集有限的模糊集，$|A_0|=n$，$|B_0|=m$，若 $\underset{\sim}{A}\sim\underset{\sim}{B}$，则 $n=m$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}(x_i)=\sum_{j=1}^{m}\underset{\sim}{B}(y_j)$.

定义 2.2 设 $|\underset{\sim}{A}|=\alpha$，$|\underset{\sim}{B}|=\beta$，规定：$\alpha\leqslant\beta\Leftrightarrow(\exists\ \underset{\sim}{B'}\subset\underset{\sim}{B})(\underset{\sim}{A}\sim\underset{\sim}{B'})$；$\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha\leqslant\beta$ 且 $\alpha\neq\beta$.

关于 F 基数的"大"，"小"关系，我们有结论：

3. $|\underset{\sim}{A}|<|\underset{\sim}{B}|\Leftrightarrow|\underset{\sim}{A}|\leqslant|\underset{\sim}{B}|$ 且 $(\exists\ \lambda\in(0,1])(|A_\lambda|<|B_\lambda|)$；

4. $|\underset{\sim}{A}|<|\underset{\sim}{B}|\leqslant|\underset{\sim}{C}|$ 或 $|\underset{\sim}{A}|\leqslant|\underset{\sim}{B}|<|\underset{\sim}{C}|\Rightarrow|\underset{\sim}{A}|<|\underset{\sim}{C}|$；

5. F 基数的"$\leqslant$"关系是个拟序关系；

6. F 基数 α 与 β 之间共有下述四种关系，其中任何两种关系不能同时成立：

$$\alpha=\beta,\alpha<\beta,\alpha>\beta,\alpha\text{ 与 }\beta\text{ 不可比}.$$

下面是几点有关 F 基数的附注：

注 1 F 基数的定义将普通集的基数作为特款，并且对 Fuzzy 集未加任何限制条件.

注 2 上面的结论 2 之逆不真，例如 $\underset{\sim}{A}=(0.6,0.3)$，$\underset{\sim}{B}=(0.7,0.2)$，则 $|A_0|=2=|B_0|$，并且

$$\underset{\sim}{A}(x_1)+\underset{\sim}{A}(x_2)=0.9=\underset{\sim}{B}(y_1)+\underset{\sim}{B}(y_2),$$

但 $|\underset{\sim}{A}|\neq|\underset{\sim}{B}|$. 在有些文献中(例如[5])，关于有限支集的 Fuzzy 集基数定义为 $|\underset{\sim}{A}|\overset{\triangle}{=}\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{A}(x_i)$，这比我们的定义条件稍弱；当支集无限时，有些人将有限和推广为无限和(在收敛的条件下)：$|\underset{\sim}{A}|=\sum_{i=1}^{\infty}\underset{\sim}{A}(x_i)$；进而又推广为积分形式(在可积的条件下)：$|\underset{\sim}{A}|=\int_{D}\underset{\sim}{A}(x)dx$. 我们考察一例：取 $\underset{\sim}{A}=[0,2]$，$\underset{\sim}{B}=[0,3]$ 均为普通集(Fuzzy 集的特例)，熟知 $[0,2]\sim[0,3]$，即 $\underset{\sim}{A}\sim\underset{\sim}{B}$，但按上述形式却有 $|\underset{\sim}{A}|=\int_0^2\underset{\sim}{A}(x)dx<\int_0^3\underset{\sim}{B}(y)dy=|\underset{\sim}{B}|$，这与常识不符，即没有把普通集的基数作为模糊集基数的特例，而我们的定义恰恰做到了这一点.

注 3 F 基数的大小关系不是偏序关系(更不是全序关系)，这一点恰恰说明 F 基数比普通基数广泛得多，正如实数是全序而复数不是全序一样.

§3 模糊集基数的表示

众所周知，一个普通集，当其有限时，可由一个自然数表示其基数，也即该集合元素的个数；当其无限时，已无法用数字表示了，只是作了很粗的分类，再冠以符号，比如 $\aleph_0$，$\aleph_1$，等等. 对于一个 Fuzzy 集，尽管支集有限，也不能用自然数甚至实数来表示基数. 然而，我们可以"由简到繁"也作一些分类，一类一类地来研究其表示问题. 先考虑最简单的情况.

给定论域 X，对于固定的 $a\in[0,1]$，规定 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$；$\underset{\sim}{A}(x)\equiv a$，称之为($X$ 上的)常值 Fuzzy 集.

显然，若 $\underset{\sim}{A}(x)\equiv a$，$\underset{\sim}{B}(y)\equiv b$ 是两个常值 Fuzzy 集，则 $|\underset{\sim}{A}|\leqslant|\underset{\sim}{B}|\Leftrightarrow(a\leqslant b,|A_0|\leqslant|B_0|)$，从而 $|\underset{\sim}{A}|=|\underset{\sim}{B}|\Leftrightarrow(a=b,|A_0|=|B_0|)$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

这样，衡量常值 Fuzzy 集的基数便有两个量：$|A_0|$和隶属度，可记为$\langle |A_0|, a\rangle \triangleq |\underset{\sim}{A}|$. 于是，这样一类 Fuzzy 集的基数就有了较具体的表示. 特别，当$|A_0|=n$有限时，则$|\underset{\sim}{A}|=\langle n,a\rangle$；亦即，有限支集的常值 Fuzzy 集的基数可由数量（自然数和实数）明确地表达出来，当然是个二维量.

视$\langle n,a\rangle$为序偶，则$\langle n,a\rangle\in N\times[0,1]$，这里 N 表示全体自然数，因此有限常值 Fuzzy 集的基数共有

$$|N\times[0,1]| = \aleph_0\cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

一般地，我们有

定理 3.1　给定论域 $X\neq\varnothing$，当$|X|\leqslant 2^{\aleph_0}$时，$X$ 上常值 Fuzzy 集的基数共有 $2^{\aleph_0}$ 个；当$|X|>2^{\aleph_0}$时，X 上常值 Fuzzy 集的基数共有$|X|$个.

§4　关于连续统假设

先作一个简单回顾. 熟知，每个自然数是基数；任何两个相邻的自然数 n 和 $n+1$ 之间不存在另外的基数. 最小的超限基数是$\aleph_0$，它是唯一的无穷可数基数. 若用$\aleph_1$表示最小的不可数基数，则在$\aleph_0$与$\aleph_1$之间不存在另外的基数. 这样一来，基数的较前部分应为：

$$0,1,2,\cdots,\aleph_0,\aleph_1,\cdots$$

这里任何相邻基数之间都没有另外的基数. 另一方面，$\aleph_0<2^{\aleph_0}$，可见$\aleph_1\leqslant 2^{\aleph_0}$.

问题是：$\aleph_1=2^{\aleph_0}$成立吗？

Cantor 猜测该等式成立！换言之，在$\aleph_0$与 $2^{\aleph_0}$ 之间不存在另外的基数. 这就是著名的连续统假设，简记为 CH.

CH 可以推广为：在超限基数 α 与 2^α 之间不存在另外的基数. 这叫做广义连续统假设，简记为 GCH.

按照 GCH，基数的链可表示为：

$$0,1,2,\cdots,\aleph_0,2^{\aleph_0},\cdots,\alpha,2^\alpha,\cdots$$

1938 年，K. Godel 证明了：若 ZFC 协调，则 ZFC 推不出 GCH 的否定；1963 年，P. Cohen 又证明了：若 ZFC 协调，则 ZFC 推不出 GCH 的肯定. 总之，GCH 在 ZFC 中不可判定.

我们不妨从 Fuzzy 集的角度来分析一下这一著名的假设，或许有些新的启示.

先看数系. 自然数的产生起源于人类在生产活动中的计算. 后来随着生产力的发展和记数方法的改进，人们陆续引入了负数、整数，有理数. 在有理数里，四则运算均可以进行，似乎再无别的数. 但由于测量单位边长正方形斜边的需要，出现了$\sqrt{2}$，于是不得不引入无理数，从而形成了实数系，也才有了今天的数学面貌. 可见，一个新概念的出现可能要极大地促进数学的发展.

关于基数的问题大概也是如此. 由于描述模糊现象的需要，出现了 Fuzzy 集. 正如要度量集合的势一样，也要测量 Fuzzy 集的势. 这样便如同引入无理数那样，也引入了 F 基数，从而使基数问题更趋完善.

任何两个相邻的基数之间果真再无另外的基数了吗？这要看站在什么范围内看问题. 在有

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

理数出现之前，任何两个相邻的整数之间没有其它的数；在无理数出现之前，任何两个有理数之间当然只有有理数. 同样，在 F 基数出现之前，任何两个相邻的基数之间确无基数. 但现在便不同，比如 0 与 1 之间就有 F 基数.

例 4.1 设 $X=\{x\}$ 为单点集，取 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$，满足 $\underset{\sim}{A}(x)=0.5$，则 $0=|\varnothing|<|\underset{\sim}{A}|<|X|=1$. 一般地，$\forall\ a\in(0,1)$，取常值 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{A}^a(x)\equiv a$，便有

$$0<\langle 1,a\rangle\overset{\triangle}{=}|\underset{\sim}{A}^a|<1.$$

这样，我们在 0 与 1 之间插入了 $2^{\aleph_0}$ 个 F 基数. 特别 $\langle 1,0\rangle=0$，$\langle 1,1\rangle=1$.

我们再设法在任何相邻的有限基数 n 与 $n+1$ 之间插入 F 基数.

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为一有限论域，p,q 为自然数，满足 $p+q=n$. 任取子集 $X_1\subset X$ 使 $|X_1|=p$，令 $X_2=X-X_1$，有 $|X_2|=q$. $\forall\ a\in[0,1]$，规定 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{A}^a\in\mathscr{F}(X)$ 如下：

$$\underset{\sim}{A}^a(x)=\begin{cases}1, & x\in X_1\\ a, & x\in X_2\end{cases}$$

称之为有限双段常值 Fuzzy 集. 记

$$\langle p,q,a\rangle\overset{\triangle}{=}|\underset{\sim}{A}^a|.$$

显然，$\langle p,q,a\rangle=\langle k,m,b\rangle\Leftrightarrow(p=k,q=m,a=b)$，故记号 $\langle p,q,a\rangle$ 是一意的. 当然，这样一类 Fuzzy 集的基数是个三维量，它以数量的形式清楚地表达了 F 基数. 此外，上一节引入的记号是这里记号的特例($p=0$).

例 4.2 取 $\langle n,1,a\rangle$，当 $a\in(0,1)$ 时，有

$$n<\langle n,1,a\rangle<n+1,$$

这意味着我们在 n 与 $n+1$ 之间插入了 $2^{\aleph_0}$ 个 F 基数.

最后考虑在超限基数之间插入 F 基数. 设 α,β 为两个超限基数，满足 $\alpha<\beta$. 取论域 X，使 $|X|=\beta$. 任取子集 $X_1\subset X$，使 $|X_1|=\alpha$，令 $X_2=X-X_1$，则 $|X_2|=\beta$. $\forall\ a\in[0,1]$，规定 Fuzzy 集 $\underset{\sim}{A}^a\in\mathscr{F}(X)$ 如下：

$$\underset{\sim}{A}^a(x)=\begin{cases}1, & x\in X_1\\ a, x\in X_2\end{cases}$$

称之为超限双段常值 Fuzzy 集. 记

$$\langle\alpha,\beta,a\rangle\overset{\triangle}{=}|\underset{\sim}{A}^a|.$$

这也是个三维量，它用基数和实数联合表达了一类 F 基数.

例 4.3 取 $\langle\aleph_0,2^{\aleph_0},a\rangle$，当 $a\in(0,1)$ 时，有

$$\aleph_0<\langle\aleph_0,2^{\aleph_0},a\rangle<2^{\aleph_0}.$$

亦即，我们在 $\aleph_0$ 与 $2^{\aleph_0}$ 之间插入了 $2^{\aleph_0}$ 个 F 基数. 特别，$\langle\aleph_0,2^{\aleph_0},0\rangle=\aleph_0$，$\langle\aleph_0,2^{\aleph_0},1\rangle=2^{\aleph_0}$. 这意味着，在 F 基数的范围内否定了 CH.

例 4.4 设 α 为任一超限基数，取 $\langle\alpha,2^\alpha,a\rangle$，当 $a\in(0,1)$ 时，在 α 与 2^α 之间亦可插入 $2^{\aleph_0}$ 个 F 基数：

$$\alpha<\langle\alpha,2^\alpha,a\rangle<2^\alpha.$$

特别，$\langle\alpha,2^\alpha,0\rangle=\alpha$，$\langle\alpha,2^\alpha,1\rangle=2^\alpha$. 这意味着，在 F 基数的范围内否定了 GCH.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

综上可以看出：在任何两个相邻基数之间至少存在 $2^{\aleph_0}$ 个 F 基数. 自然要问：在任何两个相邻基数之间究竟有多少个 F 基数？下面的定理回答了这个问题.

定理 4.1 任何两个相邻的有限基数之间恰有 $2^{\aleph_0}$ 个 F 基数；任何两个相邻的超限基数 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$ 之间恰有 2^{β} 个 F 基数.

证明 首先易知，0 与 1 之间恰有 $2^{\aleph_0}$ 个 F 基数；n 与 $n+1$ 之间共有

$$C_{n+1}^{n}\cdot|N|\cdot|(0,1)| = 2^{\aleph_0}$$

个 F 基数. 其次，设 α,β 是相邻的两个超限基数 $(\alpha<\beta)$. 取集合 X，使 $|X|=\beta$，再取子集 $X_1\subset X$，使 $|X_1|=\alpha$. 置 $X_2=X-X_1$，则 $|X_2|=\beta$. 注意到，取子集 $X_1\subset X$ 相当于作映射 $X_1\rightarrow X$，全部这样的映射为 X^{X_1}. 此外，X_2 上的隶属函数全体为 $(0,1)^{X_2}$（不取值 0 与 1）. 因此，α 与 β 之间共有下述个 F 基数：

$$|(X^{X_1})\times(0,1)^{X_2})| = \beta^{\alpha}\cdot(2^{\aleph_0})^{\beta} = \beta^{\alpha}\cdot 2^{\aleph_0\cdot\beta} = \beta^{\alpha}\cdot 2^{\beta}.$$

因为 $\beta^{\beta}=2^{\beta}$，故 $2^{\beta}\leqslant\beta^{\alpha}\cdot 2^{\beta}\leqslant\beta^{\beta}\cdot 2^{\beta}=2^{\beta}\cdot 2^{\beta}=2^{\beta}$，即 $\beta^{\alpha}\cdot 2^{\beta}=2^{\beta}$，这便是我们希望的结果. 证毕.

参考文献

[1] 李洪兴、罗承忠、汪培庄，如何定义模糊集的映射，北京师范大学学报(自然科学版)，Vol. 29，No. 1 (1993)，1—9.

[2] 李洪兴、罗承忠、汪培庄、袁学海，Fuzzy 集的基数，数学季刊，Vol. 7，No. 3(1992)，101—106.

[3] 李洪兴、罗承忠、汪培庄，Fuzzy 映射与 F 基数，高校应用数学学报，Vol. 9，No. 2(1994)，177—186.

[4] Li Hongxing，Luo Chengzhong，Wang Peizhuang，*The cardinal numbers of fuzzy sets and continuum hypothesis*，BUSEFAL，No. 48(1991)，161—168.

[5] D. Dubois and H. Prade，*Fuzzy Sets and Systems*，Academic Press，London，1980.

[6] K. Hrbacek and T. Tech，*Instroduction to Set Theory*，MARCEL DEKKER，INC.，1984.

[7] 罗承忠，模糊集引论，北京师范大学出版社，1989.

[8] 汪培庄，模糊集合论及其应用，上海科学技术出版社，1983.

Fuzzy Cardinality and Continuum Hypothesis

Li Hongxing Luo Chengzhong Wang Peizhuang

(Dept. of Math., Beijing Normal University, Beijing 100875)

Abstract

In this paper, we give a reasonable definition for the cardininality of fuzzy sets, and discuss in detail the properties. Moreover, from the fuzzy cardinality we may have some new ideas on the continuum hypothesis which is a well-known open problem.

Keywords Fuzzy set, cardinality, continuum hypothesis.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.