第15卷第1期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 1
1995年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1995

广义伪凸函数的一个性质*

杨 新 民
(重庆师范学院数学系, 630047)

关键词 广义伪凸,严格广义伪凸,判别准则.
分类号 AMS(1991) 90C25,26B25/CCL O221.2

设 B 是 R^n 中单位开球,$f:R^n\to R$ 在点 x 处称为 Lipschitz 函数,即存在两个正常数 ε,k,使得

$$|f(z)-f(y)|\leqslant k\|z-y\|,\quad \forall z,y\in x+\varepsilon B$$

成立,其中 $x+\varepsilon B=\{z|\|z-x\|<\varepsilon\}$.

若 f 在 $X\subset R^n$ 上每一点都为 Lipschitz 函数,则称 f 为 X 上局部的 Lipschitz 函数.

Clarke[1] 曾对局部 Lipschitz 函数给出如下广义方向导数和广义梯度概念:

$$f^0(x;d)=\limsup_{\substack{y\to x\\ t\searrow 0}}[f(y+td)-f(y)]/t,$$

$$\partial f(x)=\{g\in R^n|\langle g,d\rangle\leqslant f^0(x;d),\ \forall d\in R^n\}.$$

定义[2-3] 设 f 是 $X\subset R^n$ 上局部 Lipschitz 函数,若对任意 $x_1,x_2\in X$,总有

$$f(x_2)<f(x_1)\Rightarrow\xi^T(x_2-x_1)<0,\quad \forall \xi\in\partial f(x_1),$$

则称 f 为 X 上广义伪凸函数.

又若对任意 $x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$,总有 $f(x_2)\leqslant f(x_1)\Rightarrow\xi^T(x_2-x_1)<0,\forall \xi\in\partial f(x_1)$,则称 f 为 X 上严格广义伪凸函数.

我们给出广义伪凸和严格广义伪凸函数各一个判别准则.

定理1 设 X 是 R^n 中开凸子集,$f:X\to R$ 是 X 上广义伪凸函数,又 $f^0(x;d)=f'(x;d),\forall x\in X,\forall d\in R^n$. 若存在 $\xi\in\partial f(y)$,使得 $\xi^T(x-y)\geqslant 0$,其中 $x,y\in X$. 则 $\eta^T(x-y)\geqslant 0$, $\forall \eta\in\partial f(x)$.

定理2 设 f 是开凸集 $X\subset R^n$ 上局部 Lipschitz 函数,若对任意 $x,y\in X$,当存在 $\xi\in\partial f(y)$, $\xi^T(x-y)\geqslant 0\Rightarrow\eta^T(x-y)\geqslant 0,\forall \eta\in\partial f(x)$. 则 f 是 X 上广义伪凸函数.

定理3 设 f 是开凸子集 $X\subset R^n$ 上的局部 Lipschitz 函数,则 f 是 X 上严格广义伪凸函数之充要条件是对任意 $x,y\in X,x\neq y$,总有

$$\exists \xi\in\partial f(x),\ \xi^T(y-x)\geqslant 0\Rightarrow\eta^T(y-x)>0,\ \forall \eta\in\partial f(y).$$

参 考 文 献

[1] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1983.
[2] 唐焕文等, 数学学报, 33(1990), 521-527.
[3] 胡新生、唐焕文, 系统科学与数学, 10(1990), 175-180.

* 1992年2月7日收到. 94年3月30日收到修改稿. 国家自然科学基金(青年)四川省教委优秀青年教师基金资助项目.