关于 Vitali 族的分数次极大算子的加权模不等式*

刘宗光
（湖南省怀化师范专科学校数学系，418008）

摘　要　设 $\mathscr{B}=\{B_\alpha\}_{\alpha>0}$ 是 R^n 中的 Vitali 族，$0\leqslant\gamma\leqslant 1$，定义分数次极大算子如下：

$$\mathfrak{M}^\gamma f(x,t)=\begin{cases}\sup\limits_{\substack{|B_\alpha|\geqslant t^n\\ x\in\xi+B_\alpha}}\dfrac{1}{|B_\alpha|^{1-\gamma}}\displaystyle\int_{\xi+B_\alpha}|f(y)|dy; & 0\leqslant t\leqslant\Big|\bigcup\limits_{\alpha>0}B_\alpha\Big|^{\frac{1}{n}},\ x\in\bigcup\limits_{\alpha>0}B_\alpha\\ 0; & \text{其它}.\end{cases}$$

本文得到了上述分数次极大算子的加权弱型不等式和加权强型不等式.

关键词　分数次极大算子，不等式.

分类号　AMS(1991) 42B25/CCL O174.2

设 $\mathscr{B}=\{B_\alpha\}_{\alpha>0}$ 是 R^n 中的开集族，且满足：

(1)　当 $\alpha<\beta$ 时，$B_\alpha\subset B_\beta$，且 $\bigcap\limits_{\alpha>0}\overline{B}_\alpha=\{0\}$；

(2)　$|B_\alpha-B_\alpha|\leqslant c|B_\alpha|$，其中：$B_\alpha-B_\alpha=\{x-y, x\in B_\alpha, y\in B_\alpha\}$，$c$ 是与 α 无关的常数；

(3)　$|B_\alpha|$ 关于 α 是左连续的.

则称 $\mathscr{B}=\{B_\alpha\}_{\alpha>0}$ 是 R^n 中的 Vitali 族；显然 $\{tQ_0\}_{t>0}$ 是一个 Vitali 族，其中 Q_0 为中心在原点的单位开正方体.

设 $\mathscr{B}=\{B_\alpha\}_{\alpha>0}$ 是 R^n 中的 Vitali 族，$\hat{B}_\alpha=B_\alpha\times(0,|B_\alpha|^{\frac{1}{n}})$，则称 $\hat{\mathscr{B}}=\{\hat{B}_\alpha\}_{\alpha>0}$ 为由 $\mathscr{B}$ 生成的 Vitali 柱体族；若 R^n，R_+^{n+1} 中测度 w,μ 满足

$$w(B_\alpha-B_\alpha)\leqslant cw(B_\alpha)\text{ 及 }\mu(\hat{B}_\alpha-\hat{B}_\alpha)\leqslant c\mu(\hat{B}_\alpha),$$

则称 w,μ 分别关于 $\mathscr{B},\hat{\mathscr{B}}$ 满足倍增条件.

设 $\mathscr{B}=\{B_\alpha\}_{\alpha>0}$ 是 R^n 中的 Vitali 族，我们定义关于 $\mathscr{B}$ 的映 R^n 中函数为 R_+^{n+1} 中函数的 $\gamma(0\leqslant\gamma<1)$ 阶分数次极大算子如下：

$$\mathfrak{M}^\gamma f(x,t)=\begin{cases}\sup\limits_{\substack{|B_\alpha|\geqslant t^n\\ x\in\xi+B_\alpha}}\dfrac{1}{|B_\alpha|^{1-\gamma}}\displaystyle\int_{\xi+B_\alpha}|f(y)|dy, & 0\leqslant t\leqslant\Big|\bigcup\limits_{\alpha>0}B_\alpha\Big|^{\frac{1}{n}},\ x\in\bigcup\limits_{\alpha>0}B_\alpha\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

特别，记 $\mathfrak{M}^\gamma f(x,0)=M^\gamma f(x)$，$M^0f(x)=Mf(x)$，后者就是关于 $\mathscr{B}$ 的 Hardy-Littlewood 极大算子.

本文的主要工作：其一是得到 $\mathfrak{M}^\gamma$ 的加权弱 (p,q) 型不等式，其二是得出 $\mathfrak{M}^\gamma$ 的加权强 $(p,$

* 1992年1月6日收到. 94年4月23日收到修改稿. 湖南省教委科研基金资助项目.

q)型不等式，后者对于特殊的方体族也是新结果.

定义 设 μ 是 R_+^{n+1} 上的正测度，w 是 R^n 中的权函数，$0\leqslant\gamma<1$，称 $(\mu,w)\in C_{q,p}^{\gamma}(\mathscr{B})$，如果

$$\sup_{\substack{a>0\\ x\in R^n}}\frac{\mu(\widehat{x+B_a})^{\frac{1}{q}}}{|B_a|^{\frac{1}{p}-\gamma}}\Big(\frac{1}{|B_a|}\int_{x+B_a}w^{-\frac{p'}{p}}\Big)^{\frac{1}{p'}}<c<+\infty,\ (1<p\leqslant q<+\infty),$$

$$\sup_{x\in\xi+B_a}\frac{\mu(\widehat{\xi+B_a})^{\frac{1}{q}}}{|B_a|^{1-\gamma}}\leqslant cw(x),\ a.e.\ x\in R^n,\ (1=p\leqslant q<+\infty),$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

定理 1 设 $\mathscr{B}=\{B_a\}_{a>0}$是 R^n 上的 Vitali 族，μ 是 R_+^{n+1} 中的正测度.且关于由 $\mathscr{B}$ 生成的 Vitali 柱体族满足倍增条件.则下述断言等价：

(i) $\mathfrak{M}^{\gamma}$ 是 $L^p(w)$到弱 $L^q(\mu)$有界的.即 $\mu\{(x,t)\in R_+^{n+1}:\mathfrak{M}^{\gamma}f(x,t)>\beta\}\leqslant\frac{C}{\beta^q}\|f\|_{L^p(w)}^q$.

(ii) 对$\forall\ f\geqslant0,\forall\ B_a\in\mathscr{B}$ 及可测集 $S\subset B_a$，有 $\Big(\frac{1}{|B_a|^{1-\gamma}}\int_s f\Big)\mu(\hat{B}_a)^{\frac{1}{q}}\leqslant c\Big(\int_s f^p w\Big)^{\frac{1}{p}}$.

(iii) $(\mu,w)\in C_{q,p}^{\gamma}(\mathscr{B})$.

推论 1 设 μ 是限制在 $R^n\times\{0\}$ 上的测度，且 $d\mu=v(x)dx$，$v(x)$关于 $\mathscr{B}$ 满足倍增条件，则下列断言等价：

(i) M^{γ} 是 $L^p(w)$到弱 $L^q(u)$有界的.

(ii) $\forall\ f\geqslant0,\forall\ B_a\in\mathscr{B}$ 及可测集 $S\subset B_a$，有 $\Big(\frac{1}{|B_a|^{1-\gamma}}\int_s f\Big)\Big(\int_{B_a}v\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant c\Big(\int_s f^p v\Big)^{\frac{1}{p}}$.

(iii) $(v,w)\in C_{q,p}^{\gamma}(\mathscr{B})$，即

$$\sup_{\substack{a>0\\ x\in R^n}}\frac{1}{|B_a|^{1-\gamma}}\Big(\int_{x+B_a}v\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{x+B_a}w^{-\frac{p'}{p}}\Big)^{\frac{1}{p'}}<\infty\ (1<p\leqslant q<+\infty),$$

$$\sup_{\substack{a>0\\ x\in\xi+B_a}}\frac{1}{|B_a|^{1-\gamma}}\Big(\int_{\xi+B_a}v\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant cw(x),\ a.e.,\ x\in R^n(1=p\leqslant q<+\infty).$$

定理 2 设 w 是 R^n 中的权函数，μ 是 R_+^{n+1} 中的正测度，且 $\delta=w^{1-p'}$ 关于 $\mathscr{B}$ 满足倍增条件，则对$\forall\ f\in L^p(w)\cap L_{loc}^1$，$\Big(\int_{R_+^{n+1}}|\mathfrak{M}^{\gamma}f(x,t)|^q d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant c\Big(\int_{R^n}|f(x)|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}$ 成立的充要条件是

$$\Big(\int_{\hat{G}}|\mathfrak{M}^{\gamma}(\chi_G\delta)(x,t)|^q d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant c\Big(\int_G\delta(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}<+\infty,$$

其中 G 是$\{\xi+B_a\}_{\xi\in R^n,a>0}$中任意有限个之并集，$\hat{G}$ 是对应的$\{\xi+B_a\}_{\xi\in R^n,a>0}$中任意有限个之并集，且 $1<p\leqslant q<+\infty$.

推论 2 若 μ 是限制在 $R^n\times\{0\}$上的测度，且 $d\mu=v(x)dx$，w 是 R^n 中的权函数，且 $\delta=w^{1-p'}$ 关于 $\mathscr{B}$ 满足倍增条件，则下述断言等价：

(i) M^{γ} 是 $L^p(w)$到 $L^q(\mu)$有界的.

(ii) $\Big(\int_G|M^{\gamma}(\chi_G\delta)(x,t)|^q v(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant c\Big(\int_G\delta(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}<+\infty$，其中 G 是$\{\xi+B_a\}_{\xi\in R^n,a>0}$中任意有限个之并集，$1<p\leqslant q<+\infty$.

当 $\mathscr{B}$ 为方体族，且 $p=q$ 时，定理 2 即为[5]中定理 A. 在推论 2 中，当 $\mathscr{B}$ 为方体族时，即

为[6]中的结论.

为证明定理 1、定理 2 我们需要下列引理：

引理 1[1](覆盖引理)　设 E 是 R^n 中的可测集，$t(x)$是 E 到 R_+ 中的映射，且满足：

(1)　$t(x)$是有界的，且对$\forall\ t_0>0$，$\{x\in E: t(x)>t_0\}$是 R^n 中的有界集.

(2)　若 $x_n\to x_0$，$t(x_n)\to t_0$，则 $x_0\in E$ 且 $t(x_0)>t_0$，则对任意 Vitali 族 $\mathscr{B}=\{B_a\}_{a>0}$. 存在$\{x_n\}\subset E$，使得：(i)　$\{x_n+B_{t(x_n)}\}$互不相交；(ii)　$E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[x_n+B_{t(x_n)}-B_{t(x_n)}]$.

引理 2　设 $\mathscr{B}=\{B_a\}_{a>0}$是 R^n 中的 Vitali 族，$f\in L^p(w)(1\leqslant p<+\infty)$，$\beta>0$，$\Omega_\beta=\{(x,t)\in R_+^{n+1}: \mathfrak{M}^\gamma f(x,t)>\beta\}$，$\Omega'_\beta=\{x\in R^n: M^\gamma f(x)>\beta\}$，对固定 $x_0\in R^n$，令 $t(x_0,\beta)=\sup\{t: (x_0,t)\in\Omega_\beta\}=\sup\limits_{x_0\in\xi+B_a}\{t: |B_a|\geqslant t^n, \frac{1}{|B_a|^{1-\gamma}}\int_{\xi+B_a}|f(y)|dy>\beta\}$. 若 $x_0\in\Omega'_\beta$，$(\mu,w)\in C_{q,p}^\gamma(\mathscr{B})$，则当 $\beta>\frac{c}{\mu(\bigcup\limits_{a>0}(x_0+B_a))}\|f\|_{L^p(w)}$时，$t(x_0,\beta)<+\infty$.

引理 3　设 w 是 R^n 中的权函数，且关于 $\mathscr{B}$ 满足倍增条件

$$M_wf(x)=\sup_{a>0}\frac{1}{w(B_a)}\int_{x_0+B_a}|f(y)|w(y)dy,$$

则 M_w 是 $L^p(w)$到 $L^p(w)$有界的($p>1$).

参 考 文 献

[1]　N. M. Riviére, *Singular integrals and multiplier operators*, Arkiv. for Mat., 9(2), 243—278(1971).

[2]　V. M. Kokilashvili, *Weighted inequalities for maximal functions with respect to Vitali families*, Soobshck. Akad. Nauk Gruz. SSR., 98(3), 545—547(1980).

[3]　潘文杰，关于凸集族或准凸集族的极大函数的双权模不等式，北京大学学报(自然科学版)，24(5)，513—525(1988).

[4]　J. F. Ruiz, *A unified approach to carleson measures and Ap weights*, Pacific. J. of Math., 117(2), 397—404(1985).

[5]　E. T. Sawyer, *A characterization of a two-weights norm inequality for maximal operators*, Studia. Math. T. LXXY(1982).

[6]　B. Jawerth, *Weighted inequalities for maximal operators: linearization, localization and factorization*, Amer. J. Math., 108, 361—414(1986).

[7]　赖秦生，齐型空间上的分数次极大算子的加权弱型不等式，数学学报，32(4)，448—452(1989).