第15卷第1期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 1
1995年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1995

关于迭代方程$G(f(x),f^{n_1}(x),\cdots,f^{n_k}(x))=F(x)$的连续解*

司 建 国
(滨州师范专科学校数学系,山东 256604)

关键词 迭代方程,连续解,存在性,唯一性,稳定性.
分类号 AMS(1991) 39B12/CCL O175.14

本文讨论迭代方程

$$G(f(x),f^{n_1}(x),\cdots,f^{n_k}(x))=F(x) \tag{1}$$

(其中$f^0(x)=x,f^k(x)=f\circ f^{k-1}(x),k=1,2,\cdots$)连续解的存在性、唯一性以及稳定性.所得结果推广和改进了[1]中的工作.本文做如下假设:

(H_1) $G(y_0,y_1,\cdots,y_k)\in C^0(D,I),I=[a,b],D=I^{k+1}$,且$G(a,a,\cdots,a)=a,G(b,b,\cdots,b)=b$;

(H_2) 存在常数$\beta_i>0,\forall\ y_i,\bar{y}_i\in I(i=0,1,\cdots,k)$,使$|G(y_0,y_1,\cdots,y_k)-G(\bar{y}_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_k)|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\beta_i|y_i-\bar{y}_i|$,并且当$y_i\geqslant\bar{y}_i$时,存在常数$\alpha_0>0,\alpha_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,k)$,使$G(y_0,y_1,\cdots,y_k)-G(\bar{y}_0,\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_k)\geqslant\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(y_i-\bar{y}_i)$;

(H_3) $F(x)\in C^0(I,I),F(a)=a,F(b)=b$,存在常数$M>0,\forall\ x_1,x_2\in I,x_1>x_2$,有

$$0\leqslant F(x_1)-F(x_2)\leqslant\alpha_0 M(x_1-x_2).$$

定义集合:

$\mathscr{T}=\{G\in C^0(D,I):(\mathrm{H}_1)$和$(\mathrm{H}_2)$满足$\}$,

$\mathscr{F}=\{F\in C^0(I,I):(\mathrm{H}_3)$满足$\}$,

$\mathscr{A}=\{\varphi\in C^0(I,I):\varphi(a)=a,\varphi(b)=b,\exists\ M>0,\forall\ x_1,x_2\in I,x_1>x_2$,有

$$0\leqslant\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\leqslant M(x_1-x_2)\}.$$

定理1 若条件$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_3)$满足,则方程(1)在$\mathscr{A}$上有解.

证明 周知,$C^0(I,I)$依范数$\|f\|=\max_{x\in I}\{|f(x)|\}$构成Banach空间,$\forall\ \varphi\in\mathscr{A}$,令

$$L_\varphi(x)=G(x,\varphi^{n_1-1}(x),\cdots,\varphi^{n_k-1}(x)). \tag{2}$$

则可证明

$$0<\frac{x_1-x_2}{\sum_{i=1}^{k+1}\beta_{i-1}M^{n_{i-1}-1}}\leqslant L_\varphi^{-1}(x_1)-L_\varphi^{-1}(x_1)\leqslant\frac{1}{\alpha_0}(x_1-x_2),$$

且$L_\varphi:I\to I$是C^0同胚.

* 1992年3月22日收到. 94年4月1日收到修改稿.

$\forall\ \varphi\in\mathscr{A}$，定义算子 $T:\mathscr{A}\to C^0(I,I)$：$(T\varphi)(x)=L_\varphi^{-1}\circ F(x)$. 可以证明算子 T 满足 Schauder 定理的全部条件. 因此 T 在 $\mathscr{A}$ 上有不动点 $f(x)$，使得 $f(x)=L_f^{-1}\circ F(x)$，或 $L_f\circ f(x)=F(x)$，由(2)可知 $f(x)$ 为方程(1)在 $\mathscr{A}$ 上的解.

定理 2 在定理 1 的条件下，若 $\sum\limits_{i=1}^{k}\beta_i(\sum\limits_{j=1}^{n_i-2}M^j+1)<\alpha_0$，则方程(1)在 $\mathscr{A}$ 上存在唯一解.

定理 3 在定理 2 的条件下，(1)在 $\mathscr{A}$ 上的解连续依赖于已知函数 $G\in\mathscr{T}$，$F(x)\in\mathscr{F}$.

证明 $\forall\ G_i\in\mathscr{T}$，$F_i\in\mathscr{F}$，由定理 2 方程(1)在 $\mathscr{A}$ 上存在唯一解 f_i，使

$$G_i(f_i(x),f_i^{n_1}(x),\cdots,f_i^{n_k}(x))=F_i(x),$$

或 $f_i(x)=L_{f_i}^{-1}\circ F_i(x)$，$i=1,2$. 于是可证明

$$\|f_1-f_2\|_{C^0}\leqslant\frac{\|G_1-G_2\|_{C^0}+\|F_1-F_2\|_{C^0}}{\alpha_0-\sum\limits_{i=1}^{k}\beta_i(\sum\limits_{j=1}^{n_i-2}M^j+1)}.$$

因此方程(1)在 $\mathscr{A}$ 上的解连续依赖于已知函数 $G\in\mathscr{T}$，$F\in\mathscr{F}$.

在方程(1)中，若 $k=1$，$n_1=2$，则得方程

$$G(f(x),f^2(x))=F(x). \tag{3}$$

对方程(3)，有

定理 4 若条件$(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_3)$满足，且 $\forall\ x\in I$，有 $G(F(x),F(x))=F(x)$，则方程(3)在集合 $\widetilde{\mathscr{A}}=\{\varphi\in C^0(I,I):\varphi(a)=a,\varphi(b)=b,\forall\ x,x_1,x_2\in I,x_1>x_2$，有 $F(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant x,0\leqslant\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\leqslant M(x_1-x_2)\}$上有解.

证明 由定理 1 的证明，只须证 $F(x)\leqslant L_\varphi^{-1}\circ F(x)\leqslant x$. 事实上，$\forall\ \varphi\in\widetilde{\mathscr{A}}$，由 $\varphi(x)\leqslant x$，可得 $\varphi(F(x))\leqslant F(x)$，另外，由$(\mathrm{H}_2)$的第二个不等式知 $G(y_0,y_1)$关于每个变量都是递增的. 于是，由(2)可得

$$F(x)=L_\varphi^{-1}[G(F(x),\varphi(F(x)))]\leqslant L_\varphi^{-1}[G(F(x),F(x))]=L_\varphi^{-1}\circ F(x). \tag{4}$$

又 $L_\varphi(x)=G(x,\varphi(x))\geqslant G(F(x),F(x))=F(x)$. 所以

$$L_\varphi^{-1}\circ F(x)\leqslant x. \tag{5}$$

由(4)，(5)得 $F(x)\leqslant L_\varphi^{-1}\circ F(x)\leqslant x$. 其他证明与定理 1 相同.

感谢张景中、杨路二位教授及张伟年博士的指导.

参 考 文 献

[1] 张伟年，关于迭代方程 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$ 解存在性的讨论，科学通报，31:17(1986)，1290—1295.