第15卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 15 No. 1
1995年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1995

阶为偶数非交换二次闭群的结构及可解性*

田春林　　　　吴宏章
(大连管理干部学院，116033)　　(大连职工大学瓦轴分校，116300)

摘　要　[1]中给出阶为奇数的群和交换群均是二次闭群. 本文对阶为偶数的非交换二次闭群的结构作些探讨；并给出二次闭群在群可解性上的一些应用.

关键词　有限群，循环群，交换群，可解性，同构.

分类号　AMS(1991) 20E34/CCL O152.1

设 G 是有限群，集 $G^2=\{g^2|g\in G\}$，若 G^2 本身也成群，即 $G^2=(G^2)$，则称 G 为二次闭群.

引理 1[2]　设有限群 $G=AB$，$A\lhd G$，A 为二次闭群且 $B^2\subseteq A^2$.

(i)　当 $|A:A^2|=1$ 时，则 G 为二次闭群且可解；

(ii)　当 $|A:A^2|=2$ 时，则 G 为二次闭群，且当 A 可解时，G 也可解.

定理 1　若 $|A|=2m$，$(2,m)=1$，则 A 为二次闭群.

证明　因 $|A|=2m$，$(2,m)=1$，由[3]，A 是 2-幂零的，即有 $N\lhd A$ 使 $A=NP$，$N\cap P=1$，P 为 A 的一个 2 阶子群，显然 $P^2\subseteq A^2$. 又因 $|N|=m$(奇数)，所以 N 是二次闭群且 $|N:N^2|=1$，由引理 1，A 为二次闭群且 $A^2=N^2$. 因 $A^2=N^2=N$ 可解，所以 A 可解[1].

定理 2　设 A 是有限群，成立着下列结论：

(1)　若 A 是 2-群，则 $|A:A^2|=2$ 当且仅当 A 是循环群；

(2)　若 P 是二次闭群 A 的 Sylow 2-子群，则 $|P:P^2|=2$ 当且仅当 A 有正规 2-补且 $|A:A^2|=2$.

证明　(1) 充分性显然. 若 $|A:A^2|=2$，则 A/A^2 是 2 阶循环群. 但 $A^2=\varphi(A)$——A 的 Frattini 子群，因此如令 $A/A^2=\langle a\varphi(A)\rangle$，那么 $A=\langle a,\varphi(A)\rangle=\langle a\rangle$ 为循环群.

(2) 若 $|P:P^2|=2$，则由(1)，P 是循环群，由 Burnside 定理，A 有正规 2-补. 反之，若 A 有正规 2-补 N，对任意 $g\in A$，$g=ab$，$a\in P$，$b\in N$，$g^2=a^2b^2b$，$N\lhd A$，则 $b^2\in N$；$|N|=$奇数，可令 $b^2b=b_1\in N$. 当 $g^2\in P\cap A^2$，则 $b_1\in P$，得 $b_1=1$，从而 $g^2=a^2\in P^2$，所以 $P\cap A^2\subseteq P^2\subseteq P\cap A^2$，即 $P^2=P\cap A^2$. 另方面，因 $N\subseteq A^2$，有

$$A^2=A^2\cap A=A^2\cap PN=N(A^2\cap P),$$

$$|A:A^2|=|PN:(P\cap A^2)N|=|P:P\cap A^2|=|P:P^2|=2.$$

定理 3　$2^n(n\geqslant 3)$阶的非交换群 G 如有一个阶为 2^{n-1} 的元，则 G 为二次闭群.

证明　2^n 阶非交换群 G 如有一个阶为 2^{n-1} 的元，那么 G 只能是以下四种类型[3]：

(1)　$D_n=\langle a,b|a^{2^{n-1}}=1=b^2,\ b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$；

* 1992年1月6日收到.

(2) $Q_n=\langle a,b\mid a^{2^{n-1}}=1,b^2=a^{2^{n-2}},\ b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$;

(3) $S_n=\langle a,b\mid a^{2^{n-1}}=1=b^2,b^{-1}ab=a^{-1+2^{n-2}}\rangle$;

(4) $M_n=\langle a,b\mid a^{2^{n-1}}=1=b^2,b^{-1}ab=a^{1+2^{n-2}}\rangle$.

在这四种群中，显然 $G=\langle a\rangle\langle b\rangle$，$\langle a\rangle\lhd G$ 为二次闭群且 $|\langle a\rangle:\langle a\rangle^2|=2$，$\langle b\rangle^2=\langle b^2\rangle\subseteq\langle a\rangle^2=\langle a^2\rangle$. 由引理 1，$G$ 是二次闭群且 $G^2=A^2$.

引理 2 在 $n\geqslant 3$ 时成立着下述结论：

(i) 令 $P=M_n$，那么 $|P:P^2|=4$，$P^2=Z(P)-P$ 的中心-是 2^{n-2} 阶循环群；

(ii) 令 $P=D_n,Q_n$ 或 S_n，那么 $|P:P^2|=4$，$P^2=[P,P]$是 2^{n-2} 阶循环群，$|Z(P)|=2$，且无 8 阶的非循环的交换子群.

定理 4 若 P 是 2^n 阶非交换的二次闭群，且 $|P:P^2|=4$，则 P 同构于 D_n,Q_n,S_n 或 M_n.

证明 对 n 用归纳法. 当 $n=3$ 时，结论成立. 归纳地假设对不超过 $n-1$ 的自然数结论成立，考虑 $n>3$.

因 $P^2\lhd P$，$P^2\neq 1$（否则 P 交换），则 $P^2\cap Z(P)\neq 1$. 取 $P^2\cap Z(P)$的极小正规子群 Z，则 $Z\lhd P$ 且 $|Z|=2$. 显然，商群 P/Z 为二次闭群且 $(P/Z)^2=P^2/Z$，$|P/Z:(P/Z)^2|=|P:P^2|=4$. 又因 $|P/Z|\geqslant 2^3(n>3)$ 且 P 非交换，则 P/Z 也是非交换的. 由归纳假设，P/Z 必同构于 D_{n-1},Q_{n-1}，S_{n-1} 或 M_{n-1}. 令 H/Z 是 P/Z 的极大循环正规子群，如果 H 也是循环的，则由 $|H|=2^{n-1}$，P 只能是 D_n,Q_n,S_n 或 M_n 之一，结论成立.

因 $Z\subseteq Z(P)$，显然 $Z\subseteq Z(H)$. 令 $Z=\langle z\rangle$，$z^2=1$，那么从 H/Z 循环得 $H=\langle X,Z\rangle$，$|X|=2^{n-2}$ 且 H 交换. 这时 $H^2=\langle X^2\rangle$，$\Omega_1(H)=\langle X^{2^{n-3}},Z\rangle$（这里 $\Omega_1(H)=\langle h\in H\mid h^2=1\rangle$），$X=H^2\cap\Omega_1(H)=\langle X^{2^{n-3}}\rangle$是 H 的特征子群，这因 H^2 与 $\Omega_1(H)$都是 H 的特征子群. 但 $H\lhd P$，故 $X\lhd P$，$|X|=2$. 从而 X 是 P 的极小正规子群，所以 $X\subseteq Z(P)\cap H$. 作商群 $XZ/Z\subseteq Z(P/Z)$，因 $X\neq Z$，故 $XZ/Z\neq 1$. 若 P/Z 同构于 D_{n-1},Q_{n-1} 或 S_{n-1}，由引理 2，$|Z(P/Z)|=2$. 从而 $XZ/Z=Z(P/Z)\subseteq(P/Z)'=P'/Z$. 于是 $X\subseteq P'\subseteq P^2$（这里 $P'=[P,P]$是 P 的换位子群）. 所以商群$(P/X)^2=P^2/X$，$|P/X:(P/X)^2|=4$. $X\subseteq Z(P)$且 P 非交换，所以 P/X 非交换，由归纳假设 P/X 同构于 D_{n-1},Q_{n-1},S_{n-1} 或 M_{n-1}. 若 P/Z 同构于 M_{n-1}，由于 $XZ/Z\subseteq Z(P/Z)=(P/Z)^2=P^2/Z$，则上述结论同样成立.

现在 $H/X=\langle xX,zX\rangle$为$(2^{n-3},2)$型交换群，如果 P/X 是 D_{n-1},Q_{n-1} 或 S_{n-1} 之一，由引理 2，P/X 没有非循环的 8 阶子群，故 $n>4$ 不可能. 而当 $n=4$，对 2^4 阶群经直接验证知，只有 D_4，Q_4,S_4 或 M_4 是$|P:P^4|=4$ 的二次闭群.

最后，若 P/X 同构于 M_{n-1}，由引理 2，$(P/X)^2=P^2/X$ 是 2^{n-3} 阶循环群. 同样，由引理 2，$(P/Z)^2=P^2/Z$ 也是 2^{n-3} 阶循环群. 另方面，$X^2\in P^2$，$Z\in P^2$ 推出$\langle X^2\rangle\langle Z\rangle\subseteq P^2$，而$|\langle X^2\rangle\langle Z\rangle|=|X^2|\cdot|Z|/|\langle X^2\rangle\cap\langle Z\rangle|$. 从而 $X\neq Z$ 知$\langle X^2\rangle\cap\langle Z\rangle=1$，所以$|\langle X^2\rangle\langle Z\rangle|=2^{n-3}\cdot 2=2^{n-2}$. 再由 $|P:P^2|=4$得$|P^2|=2^{n-2}$，不得不有 $P^2=\langle X^2\rangle\langle Z\rangle$，这就与 P^2/X 为循环群矛盾，除非 $X^2=1$，即 $n=4$. 因此，P/X 同构于 M_{n-1} 的情形不可能发生. 至此就完全地证明了我们的定理.

注 从表面上看，上述定理 4 的证明并未用到 $P^2=\langle P^2\rangle$. 但在归纳过程中必须验证 $n=4$ 的情形. 如果不加 $P^2=\langle P^2\rangle$的限制，那么群 $G=\langle a,b\mid a^4=b^4=1,b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$之$|P:P^2|=4$，但 $P^2\neq\langle P^2\rangle$. （转 154 页）

推论 1 半单纯环的任意两边理想都可以分解为有限个素理想的乘积.

推论 2 设 N 为环 A 的幂零两边理想,则 A 的包含 N 的左理想 L 可分解为有限个素理想的乘积的充分必要条件是 L/N 可分解为 A/N 中有限个素理想的乘积.

推论 3 设环 A 满足左理想极小条件,其根为 N,则 A 的含 N 的任意左理想必可分解为有限个素理想之积.

定理 2 设 A 为半单纯的交换环,则其中任意理想 W 皆可分解为有限个素理想之积,并且除单位因子外,分解是唯一的.

参 考 文 献

[1] 李希民,极小条件环中素理想的结构和左理想的素理想分解,东北数学 5(2),1989,240—241.

[2] 谢邦杰,抽象代数学,上海科学技术出版社,1984,490—493.

[3] E. Artin, C. J. Nesbitt, R. M. Thrall, *Ring with minimum condition*, Princeton University Press, Princeton, 1946, 27—31.

The Prime Ideal Decomposition of a Left Ideal in Rings with Minimum Condition

Wang Yuanjin

(Dept. of Math., Liaoning Normal University, Dalian 116022)

Abstract

In this paper we give the decompositon for a left ideal as a finite produce of prime left ideals in a ring with minimum condition, and prove uniqueness of decomposition in commutative semisimple rings.

Keywords rings with minimum condition, prime left ideal, decomposition of divisor.

(接 156 页)

参 考 文 献

[1] 陈廷祥,关于群的二次群,数学的实践与认识,1984,第 3 期.

[2] 田春林,有限可分群与二次闭群,辽宁师范大学学报,1990,第 4 期.

[3] 张远达,有限群构造,科学出版社,1982.