一族 4-PBIB 设计*

陈瑞琛
（扬州大学师范学院数学系，225002）

关键词 t-PBIB 设计，有限域，反演平面.
分类号 AMS(1991) 05B05,51E05/CCL O157.2

最近魏万迪和阳本傅[1]引进了 t-PBIB 设计概念，研究了它们的性质，并作出一族 3-PBIB 设计. 当 $t\geqslant 4$ 时是否存在 t-结合方案和 t-PBIB 设计，还没有已知结果. 本文利用有限反演平面构作了一族 4-结合方案和相应的 4-PBIB 设计. 我们将沿用文[1]的术语和记号.

根据定义，一个反演平面[2]是指这样一个关联结构 $S=(M,\Gamma,I)$，其中 M 为点集，I 为结合关系，Γ 为区组集，区组称为圆，且满足下列公理：

(1) 对 M 中不同三点 A,B,C，恒有 $[A,B,C]=1$，这里 $[A,B,C]$ 表示同时含三点 A,B 和 C 的区组的个数.

(2) 若 $A,B,C\in M$ 及 $c\in\Gamma$ 满足 AIc，$B\bar{I}c$，其中 $\bar{I}$ 表示不关联，则存在唯一 $d\in\Gamma$，满足 AId 及 BId 且 d 与 c 有唯一公共点 A.

(3) $|M|\geqslant 4$；存在 $A\in M$ 及 $c\in P$ 满足 $A\bar{I}c$；并且对于每个 $x\in\Gamma$，与 x 关联的点的个数 $[x]>0$.

一个有限反演平面也可以等价地定义为具有下列参数的(1,3)型设计[2]：

$$v=n^2+1,\ k=n+1,\ b=n(n^2+1),\ r=n(n+1),\ \lambda=n+1,\ b_3=1,$$

其中 n 为某个整数，称为反演平面的阶.

在一个有限反演平面中，对于不同两点 A 和 B，存在一个由圆组成的集合 F，使得 F 中每两个圆无公共点，并且分别与 F 中各圆关联的点遍及平面上除 A 和 B 而外的所有各点[2]. 集 F 叫做一个 flock，两点 A 和 B 叫做 F 的承载子.

定理 1 设 M 是 q 阶反演平面，$q>2$，则可利用 M 作出一个含两个结合类的 4-结合方案，其参数为：

$$n_1=q-2,\ n_2=q^2-q,\ p^1_{1111}=q-3,\ p^1_{2222}=q^2-q,\ p^2_{1222}=q-2,\ p^2_{2222}=q^2-4q+5,$$
$$p^1_{1112}=p^1_{1122}=p^1_{1222}=p^2_{1111}=p^2_{1112}=p^2_{1122}=0.$$

证明 取 M 中的点为处理，当 M 中四点 A,B,C,D 共圆时，规定对应的处理有 4 元结合关系 R_1；当四点不共圆时，规定对应的处理有 4 元结合关系 R_2.

对于每个点 $X\in M$，$M\setminus\{X\}$ 是一个 q 阶仿射平面. 又若 $c\in\Gamma$，XIc，则 $c\setminus\{X\}$ 是 $M\setminus\{X\}$ 中的直线. 由此可计算出各参数.

* 1992 年 2 月 7 日收到. 94 年 4 月 14 日收到修改稿.

定理 2 设 M 是 q 阶反演平面，$q>2$，则可利用 M 作出一个 4-PBIB 设计，使它满足定理 1 中的 4-结合方案，并具有参数

$$v=q^2+1,\ k=q^2-1,\ b=\frac{1}{2}q^2(q^2+1),\ \lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}(q^2-3)(q^2+3).$$

证明 取 M 的点作为处理，结合关系的规定同上，则可得到满足定理 1 的 4-结合关系，又取 M 中的 flock 作为区组，若 $A\in M$，A/c，$c\in F$，则规定处理 A 被包含在区组 F 中. 由于 M 中的每个 flock 由其承载子完全决定，可知这样构作的结果得到一族 4-PBIB 设计，且不难具体计算出设计的参数.

例 设 M 为 3 阶反演平面，则 M 有 10 个点，30 个圆. 用 0，1…，9 表示点，c_j 表示圆($j=1\sim30$)，$c_1=(0123)$表示圆 c_1 包含四点 0，1，2，3，其余类推，则可列举 M 的结合关系如下：

$c_1=(0123)$，　$c_2=(0148)$，　$c_3=(0159)$，　$c_4=(0167)$，　$c_5=(0258)$，

$c_6=(0247)$，　$c_7=(0269)$，　$c_8=(0357)$，　$c_9=(0368)$，　$c_{10}=(0349)$，

$c_{11}=(0789)$，　$c_{12}=(0456)$，　$c_{13}=(1256)$，　$c_{14}=(1249)$，　$c_{15}=(1278)$，

$c_{16}=(1346)$，　$c_{17}=(1358)$，　$c_{18}=(1379)$，　$c_{19}=(1457)$，　$c_{20}=(1689)$，

$c_{21}=(2345)$，　$c_{22}=(2367)$，　$c_{23}=(2389)$，　$c_{24}=(2468)$，　$c_{25}=(2579)$，

$c_{26}=(3478)$，　$c_{27}=(3569)$，　$c_{28}=(4589)$，　$c_{29}=(4679)$，　$c_{30}=(5678)$.

M 共合 210 个四元子集，其中由 c_1 至 c_{30} 指明的 30 个子集中的元素有 4 元结合关系 R_1，其余 180 个四元子集的元素有关系 R_2. 每个 flock 由两个无公共点的圆组成，容易验证定理 1 和定理 2 的结论在本例中全部成立.

参 考 文 献

[1] Wei Wandi, Yang Benfu, *t-PBIB designs*, Chin. Ann. of Math., 11B:2(1990), 171—178.

[2] P. Dembowski, *Finite Geometries*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

A Class of 4-PBIB Designs

Chen Ruichen

(Dept. of Math., Yangzhou University, 225002)

Abstract

A class of 4-associated scheme and corresponding 4-PBIB designs are constructed by means of finite inversive planes.

Keywords *t*-PBIB design, finite field, inversive plane.