第15卷第3期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 3
1995年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1995

紧 Lie 群上 $H^p(0<p<1)$ 函数的临界阶 Bochner-Riesz 平均算子的有界性*

姚祖喜　　郑学安
(贵州民族学院数学系，贵阳 550025)　(安徽大学数学系，合肥 230039)

摘　要　本文利用尺度 $\|\cdot\|_{H(p,\infty)}$ 研究了一般紧 Lie 群上 H^p 函数的临界阶 Bochner-Riesz 平均算子 $\sigma_R^\delta: f\to\sigma_R^\delta f$ 的有界性，得到了如下结果：σ_R^δ 是 $(H^p, H(p,\infty))$ 型的，并且 $\|\sigma_R^\delta f\|_{H(p,\infty)}\leqslant C\|f\|_{H^p}$，其中 C 为与 f 及 R 无关的常数.

关键词　紧 Lie 群，$H(p,\infty)$ 空间，Bochner-Riesz 平均算子，H^p 空间.
分类号　AMS(1991) 43A77, 43A32/CCL O174

§1　有关记号

设 G 是秩为 q 的 n 维连通紧 Lie 群，g 为其相应的 Lie 代数，T 是 G 的一个 Cartan 子群，τ 为 T 对应的 g 的一个 Cartan 子代数，Δ 和 Δ^+ 分别为相应的根系和正根系，以 m 记正根的个数，熟知 $n=2m+q$.

$D=\{h\in\tau: \exp h=e\in G\}$ 为单位格.

设 $f\in H^p(G)$，在广义函数意义下，f 的 Fourier 级数是

$$f(x)\sim\sum_{\lambda\in\hat{G}}d_\lambda\chi_\lambda * f(x),$$

其中 $\hat{G}$ 为 G 的酉对偶，d_λ 和 χ_λ 分别为以 λ 为最高权的不可约酉表示的维数和特征标.

f 的 δ 阶 Bochner-Riesz 平均定义为

$$\sigma_R^\delta f(x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}\left(1-\frac{|\lambda+\beta|^2}{R^2}\right)^\delta d_\lambda\chi_\lambda * f(x),$$

这里 β 为正根系中全体正根之和的一半.

约定：　在本文中统一用 C 记各种不同的与 f 及 R 无关的常数，δ 均指临界阶 $\frac{n}{p}-\frac{x+1}{2}$.

§2　主要结果及有关定义

我们的主要目的是对临界阶 δ 时 G 上的 H^p 函数的 Bochner-Riesz 平均算子 $\sigma_R^\delta: f\to\sigma_R^\delta f$，证明如下的结果：

* 1992年6月23日收到. 国家自然科学基金资助课题.

定理 2.1　δ 为临界阶 $\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$，$0<p<1$，则算子 σ_R^δ 是 $(H^p, H(p,\infty))$ 型的，并且

$$\|\sigma_R^\delta f\|_{H(p,\infty;G)} \leqslant C\|f\|_{H^p(G)},$$

其中 C 是与 f 及 R 无关的常数.

由此定理，立即得到如下的推论

推论 2.2　在定理 2.1 的条件下，有

$$\lim_{R\to\infty}\|\sigma_R^\delta f - f\|_{H(p,\infty;G)} = 0.$$

定义 2.3　G 上的弱 H^p 空间 $H(p,\infty;G)$ 定义为 $H(p,\infty;G)=\{f\in S'(G): p_+^*(f)\in L(p,\infty;G)\}$，其中的 $p_+^*(f)$ 为 f 的 Poisson 径向极大，$L(p,\infty;G)$ 为 G 上的 Lorentz 空间，其定义与欧氏空间上的情形没有本质的差别(见[7]).

由文献[4]知，紧 Lie 群 G 上的 Poisson 核 $p(t,x)$ 有如下的分解

$$p(t,x) = A(t,x) + tB(t,\cdot) * A(t,\cdot)(x),$$

并且当 $0<t<1$ 时，$|B(t,x)|$ 被 G 上的一个可积函数所控制. 这里 $A(t,x)$ 为 G 上的 Abel 核，其定义为 $A(t,x) = \sum_{\lambda\in\hat{G}} e^{-t|\lambda+\beta|} d_\lambda \chi_\lambda(x)$. 由此，通过简单的验算可知，对于我们的问题，在定义 2.3 中可以用 $S_*^A(f)$ 代替 $p_+^*(f)$，其中 $S_*^A(f)(x)=\sup_{t>0}\{|S_t^A(f)(x)|\}$，而 $S_t^A(f)$ 是 f 的 Abel 平均.

§3　关于 Bochner-Riesz 平均算子及 Abel 核的若干引理

引理 3.1　设 a 为 G 上任一正则的 (p,∞,s) (s 取 $[n(\frac{1}{p}-1)]$) 原子(其定义见[3]、[5])，则有 $\sigma_R^\delta a$ 满足消失矩条件，即

$$\int_G \sigma_R^\delta a(y) p(\pi(y))dy = 0,$$

其中 π 为 G 的忠实表示，$p(\cdot)$ 为某一实向量空间 E 上任一次数不超过 S 的多项式.

证明

$$\begin{aligned}\int_G \sigma_R^\delta a(y)p(\pi(y))dy &= \int_G\int_G \sigma_R^\delta(z)a(yz^{-1})dz p(\pi(y))dy \\ &= \int_G\int_G \sigma_R^\delta(z)a(yz^{-1})p(\pi(yz^{-1}z))dzdy = \int_G\int_G \sigma_R^\delta(z)a(yz^{-1})p(\pi(yz^{-1})\cdot\pi(z))dzdy \\ &= \int_G \sigma_R^\delta(z)\int_G a(yz^{-1})p(\pi(yz^{-1})\cdot\pi(z))dydz.\end{aligned}$$

因为紧 Lie 群上的原子的平移还是原子，且其消失矩的阶不变([3])，所以 $a(yz^{-1})$ 仍是 G 上具有 s 阶消失矩的正则原子；π 是 G 的忠实表示，所以 $\pi(z)$ 是一个线性变换，故知 $p(\cdot\pi(z))$ 仍是 E 上的多项式，并且其阶不变，于是

$$\int_G a(yz^{-1})p(\pi(yz^{-1})\cdot\pi(z))dy = 0,$$

由此引理 3.1 得证.

以下结论常要用到，故以引理的形式列出如下：

引理 3.2　(i) 如 $\alpha>\frac{n-1}{2}$，则存在与 R 无关的常数 C，使得 $\|\sigma_R^\alpha\|_1\leqslant C$([9])；

(ii) $\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$, $0<p<1$, a 为任一 H^p 原子，则有

$$(\sigma_*^\delta a)(x) \leqslant C\begin{cases}\rho^{-n/p}, & |x| \leqslant 2\rho \\ |x|^{-n/p}+C_1(x), & |x| \geqslant 2\rho\end{cases},$$

这里 $\sigma_*^\delta a$ 为 a 的极大 Bochner-Riesz 平均，C 为与 a 无关的常数，ρ 是 a 为正则原子时的原子半径，$C_1(x)$ 为 G 上一确定的 L^1 可积并且也是 L^2 可积的函数([3]).

下面我们来考察 Abel 核的有关性质.

由维数公式、特征标公式以及 Poisson 求和公式和关于径向函数的求导公式([4]、[9])通过计算可得

$$A(t,x)=A(t,\exp h)=Ct^{-n}\sum_{\xi\in D}\Delta^{-1}(h+\xi)p(h+\xi)(1+t^{-2}|h+\xi|^2)^{-\frac{n+1}{2}},$$

其中 $x=y\exp hy^{-1}$, $y\in G$, $h\in\tau$, 而 $\Delta(\cdot)=\prod_{\alpha\in\Delta^+}\sin\frac{\alpha(\cdot)}{2}$, $p(h)=\prod_{\alpha\in\Delta^+}(\alpha,h)$.

引理 3.3 存在与 t 无关的常数 C，使得 $\|A(t,\cdot)\|_1\leqslant C$.

证明 设 Q 为 τ 的一个基本邻域，则

$$\|A(t,\cdot)\|_1=\int_G|A(t,y)|dy=\frac{1}{|w|}\int_Q|A(t,\exp h)||\Delta(h)|^2dh,$$

其中 $|w|$ 为 G 的 Weyl 群的阶.

因为当 $t\geqslant a_0$ 时(a_0 为某个固定的正数)，$e^{-t|\lambda+\beta|}\leqslant a_0^{-1}|\lambda+\beta|^{-1}$，而 $\sum_{\lambda\in\hat{G}}{}'|\lambda+\beta|^{-1}d_\lambda\chi_\lambda$ 可积($\sum{}'$ 表示对 $\lambda\neq0$ 求和)(见文献[4])，所以此时 $\|A(t,\cdot)\|_1\leqslant C$，$C$ 与 t 无关.

下面考虑 $0<t\leqslant a_0$ 时的情形. 上述 a_0 取其使当 $|h|\leqslant a_0$ 时，$|p(h)\Delta^{-1}(h)|\leqslant b$，$b$ 为一正常数，而 $h\in Q$.

$$\begin{aligned}\|A(t,\cdot)\|_1&=C\int_Q\Big|t^{-n}\sum_{\xi\in D}\Delta^{-1}(h+\xi)p(h+\xi)(1+t^{-2}|h+\xi|^2)^{-\frac{n+1}{2}}\Big|\cdot|\Delta(h)|^2dh\\&\overset{\text{def}}{=}C(I+J),\end{aligned}$$

I 和 J 分别为上述积分中 $\xi\neq0$ 和 $\xi=0$ 的部分.

因为当 $\xi\neq0$, $h\in Q$ 时，$p(h+\xi)=O(|\xi|^m)$，$(1+t^{-2}|h+\xi|^2)^{-\frac{n+1}{2}}=O(t^{n+1}|\xi|^{-n-1})$，并且对任何的 $\xi\in D$，$|\Delta(h+\xi)|=|\Delta(h)|$，所以

$$\begin{aligned}I&\leqslant t^{-n}\int_Q\sum_{\xi\neq0}|p(h+\xi)|(1+t^{-2}|h+\xi|^2)^{-\frac{n+1}{2}}|\Delta(h)|dh\\&\leqslant Ct\sum_{\xi\neq0}|\xi|^{m-n-1}\int_Q|\Delta(h)|dh,\end{aligned}$$

因为 $n+1-m\geqslant q+1$，所以 $\sum_{\xi\neq0}|\xi|^{m-n-1}$ 收敛，而 $|\Delta(h)|$ 可积，故 $I\leqslant C$.

$$J=\int_Q|t^{-n}\Delta^{-1}(h)p(h)|(1+t^{-2}|h|^2)^{-\frac{n+1}{2}}|\Delta(h)|^2dh=\int_{|h|\leqslant t}+\int_{|h|\geqslant t,h\in Q}\overset{\text{def}}{=}J_1+J_2,$$

$$J_1\leqslant Cbt^{-n}\int_{|h|\leqslant t}|\Delta(h)|^2dh\leqslant Ct^{-n}\int_{|X|\leqslant T,X\in\mathfrak{G}}dx\leqslant C,$$

$$J_2=\int_{t\leqslant|h|\leqslant a_0}+\int_{|h|\geqslant a_0,h\in Q}\overset{\text{def}}{=}J_{21}+J_{22},$$

$$J_{21}\leqslant Ct\int_{t\leqslant|h|\leqslant a_0}|h|^{-n-1}|\Delta(h)|^2dh\leqslant Ct\int_{t\leqslant|x|\leqslant a_0}|x|^{-n-1}dx\leqslant C,$$

$$J_{22}\leqslant Cta_0^{-n-1}\int_{|h|\geqslant a_0,h\in Q}|\Delta(h)|dh\leqslant C. \qquad \square$$

以 $U(g)$表示 g 上的泛包络代数，它可以看作 G 上的全体左不变微分算子所成的代数，设 m_0 为非负整数，记 $U_{m_0}(g)$为 $U(g)$中阶不超过 m_0 的微分算子全体，则$\{Y^I\}$（对所有$|I|\leqslant m_0$）组成 $U_{m_0}(g)$的基，其中 $Y^I=Y_1^{I_1}\cdots Y_n^{I_n}$，$I=(I_1,\cdots,I_n)$为 n 元非负整数组，$\{Y_1,\cdots,Y_n\}$为g^C的一组向量基，$|I|=I_1+\cdots+I_n$. 下面给出对 $\Lambda(t,x)$的导数的估计.

引理 3.4 存在与 t 无关的常数 C，使得

$$|Y^I\Lambda(t,x)|\leqslant C\sum_{k=0}^{|I|}|x|^{-n-k}+C|\Delta^{-1}(x)|,$$

其中 $\Delta(x)=\Delta(\exp h)\overset{\text{def}}{=}\Delta(h)$，$x=y\exp hy^{-1}$.

对 $t\leqslant a_0$（某个固定的数），利用文献[3]中的方法通过复杂的计算可得，对 G 的正则元集引理 3.4 成立；对 $t\geqslant a_0$，由估计式$|Y^J\chi_\lambda(x)|\leqslant d_\lambda^n|\lambda+\beta|^{|J|}$可以推知引理也成立，最后利用一些通常的处理方法即可得到对任意的 $x\in G$，引理成立.

引理 3.5 设 f 是 G 上的光滑函数，n_0 为正整数，$x_0\in G$，则存在 E（其意义如前）上的多项式 p 使得，对任意的 $x\in O_0(x_0)$（O_0 是 x_0 的某个邻域），有

$$|p(\pi(x))|\leqslant C\sum_{k=0}^{n_0}\sum_{|J|=k}|Y^Jf(x_0)|d(x,x_0)^k,$$

并且

$$|f(x)-p(\pi(x))|\leqslant C_0d(x,x_0)^{n_0+1}\sup_{\substack{|J|\leqslant n_0+1\\ y\in \bar{O}_0}}|Y^Jf(y)|,$$

其中 $d(\cdot,\cdot)$为 G 上的 Riemann 度量，而 C_0、O_0 由于 G 的紧性是关于 x_0 一致的.

证明 因为 $\pi(G)$是 E 的一个子流形，π 是 G 的忠实表示，所以存在以 x_0 为中心的球 O_0，E 中 $\pi(x_0)$的邻域 Ω_0，以及一个正数 T_0，使得

$$\Omega_0\approx O_0\times[-T_0,T_0]^d,\ d=\operatorname{cod}_E\pi(G)\text{（即 }\pi(G)\text{ 在 }E\text{ 中的余维数）}.$$

$O_0\times[-T_0,T_0]^d$是一个平凡的矢量丛. 因为 f 是 G 上的函数，所以在 O_0 上有定义. 做投影映射 $p:\Omega_0\to O_0$，则$\forall\ x\in O_0$，$p^{-1}(x)$是 Ω_0 在 x 上的纤维，并且 $\Omega_0=\bigcup_{x\in O_0}p^{-1}(x)$.

作延拓 $\tilde{f}:O_0\times[-T_0,T_0]^d\to\mathbb{R}$，$(x,y)\to\tilde{f}(x,y)=f(x)$，其中 $y\in[-T_0,T_0]^d$，则把 f 从 O_0 延拓到 p 的所有纤维上，故延拓到了 Ω_0 上. 于是可在欧氏空间 E 上对 $\tilde{f}$ 做 Taylor 逼近. 设 $\tilde{f}$ 的次数不超过 n_0 的 Taylor 多项式逼近为 p，则易得 p 满足引理中的要求.

§4 定理 2.1 的证明

由紧 Lie 群上的 H^p 空间的理论（[4]，[5]），要证明定理 2.1，只要证明如下的命题：

命题 4.1 设 $\delta=\frac{n}{p}-\frac{n+1}{2}$，$0<p<1$，则 G 上的 H^p 函数的 Bochner-Riesz 平均算子 $\sigma_R^\delta:f\to\sigma_R^\delta f$ 满足 $\|\sigma_R^\delta a\|_{H(p,\infty,G)}\leqslant C$ 对任意的 H^p 原子 a 成立，C 为与 a 及 R 无关的常数.

证明 对任意的例外原子和正则的(p,∞,s)原子，要证明

$$\| \sigma_R^\delta a \|_{H(p,\infty,G)} \leqslant C. \tag{4.1}$$

由定义 2.3 及其后的说明，只要证明

$$S_*^A(\sigma_R^\delta a)(x) \leqslant C + C(\rho + |x|)^{-n/p}, \tag{4.2}$$

其中 C 为与 a 及 R 无关的常数，ρ 为当 a 是正则的 H^p 原子时的原子半径.

当 a 为例外原子时，由于 $\delta = \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2} > \frac{n-1}{2}$，所以由引理 3.2(i)及引理 3.3 通过简单的计算可得 $S_*^A(\sigma_R^\delta a)(x) \leqslant C$.

下设 a 为任一中心在 元 $e \in G$，半径为 ρ 的正则(p,∞,s)原子.

当 $|x| \leqslant 2\rho$ 时，

$$|S_t^A(\sigma_R^\delta a)(x)| = \left| \int_G A(t, xy^{-1}) \sigma_R^\delta a(y) dy \right| \leqslant \| \sigma_R^\delta a \|_\infty \cdot \| A(t, \cdot) \|_1.$$

由引理 3.2(i)，正则原子的定义及引理 3.3 得

$$S_*^A(\sigma_R^\delta a)(x) \leqslant C\rho^{-n/p}.$$

以下考虑 $|x| \geqslant 2\rho$ 时的情形.

由引理 3.1 及引理 3.5，存在 E 上的多项式 p，使得

$$\begin{aligned} |S_t^A(\sigma_R^\delta a)(x)| &= \left| \int_G A(t, xy^{-1}) \sigma_R^\delta a(y) dy \right| = \left| \int_G [A(t, xy^{-1}) - p(\pi(y))] \sigma_R^\delta a(y) dy \right| \\ &\leqslant \int_G |A(t, xy^{-1}) - p(\pi(y))| \, |\sigma_*^\delta a(y)| dy = \int_{|y| \leqslant \frac{1}{2}|x|} + \int_{|y| \geqslant \frac{1}{2}|x|} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} K + L, \end{aligned}$$

由引理 3.5 得

$$K \leqslant C \int_{|y| \leqslant \frac{1}{2}|x|} |y|^{s+1} \sup_{\substack{|J| \leqslant s+1 \\ \gamma \in B(e, |x|/2)}} |(Y^J A(t, \cdot))(x\gamma^{-1})| \, |\sigma_*^\delta a(y)| dy,$$

其中 $\gamma \in B(e, |x|/2)$ 是 e 到 y 的测地线之间的一点. 由 $|y| \leqslant \frac{1}{2}|x|$，$\gamma \in B(e, |x|/2)$ 可得

$$|x\gamma^{-1}| = d(x, \gamma) \geqslant \frac{1}{2}|x|,$$

再由引理 3.2(ii)和引理 3.4 通过计算可得 $K \leqslant C + C|x|^{-n/p}$.

$$L \leqslant \int_{|y| \geqslant \frac{1}{2}|x|} |A(t, xy^{-1})| \, |\sigma_*^\delta a(y)| dy + \int_{|y| \geqslant \frac{1}{2}|x|} |p(\pi(y))| \, |\sigma_*^\delta a(y)| dy \stackrel{\text{def}}{=} L_1 + L_2,$$

对 L_1，由引理 3.2(ii)和引理 3.3 得 $L_1 \leqslant C + C|x|^{-n/p}$；对 L_2，由引理 3.5，引理 3.4 和引理 3.2(ii)通过简单的计算可得 $L_2 \leqslant C + C|x|^{-n/p}$.

综上所述，(4.2)得证. 命题 4.1 证毕.

参 考 文 献

[1] 李世雄、郑学安，《紧 Lie 群的表示与 Fourier 分析》(讲义).

[2] 陆善镇，H^p 空间的实变理论及其应用，上海科技出版社，1992.

[3] J. L. Clerc, Lecture Notes In Math., 1243(1987), 86—1107.

[4] 郑学安、陆善镇，紧致齐性空间上的调和分析(Ⅰ)，数学进展，22:4(1993), 289—305.

[5] 陆善镇、郑学安，紧致齐性空间上的调和分析(Ⅱ)，(Ⅲ)，北京师范大学学报，28:3(1992)，265—286.
[6] 陆善镇，临界阶 Riesz 平均在实 Hardy 空间上的逼近性质，中国科学(A 辑)，1987(4).
[7] J. L. Clerc, Ann. Inst. Fourier, 24(1974), 149—172.
[8] E. M. Stein, G. Weiss, 欧氏空间上的调和分析引论，上海科技出版社.
[9] 郑学安，紧 Lie 群上 Fourier 级数的球平均求和(Ⅰ)，东北数学，1989(5)，301—308.

Boundedness of Bochner-Riesz Means Operators at Critical Index of H^p Functions on Compact Lie Groups

Yao Zuxi
(Guizhou Inst. of Nationalities, Guiyang 550025)

Zheng Xuean
(Anhui Univ. Hefei 230039)

Abstract

In terms of the scale $\|\cdot\|_{H(p,\infty)}$, the boundedness of Bochner-Riesz means operators $\sigma_R^\delta : f \to \sigma_R^\delta f$ at critical index of H^p functions on compact Lie groups is studied. It is proved that σ_R^δ is of $(H^p, H(p,\infty))$ type and $\|\sigma_R^\delta f\|_{H(p,\infty)} \le C\|f\|_{H^p}$, where C is independent of f and R.

Keywords compact Lie group, Bochner-Riesz means, H^p space.