一个双周期缺项整插值问题*

侯象乾
(宁夏大学数学系,银川 750021)

摘 要 本文研究等距结点上双周期$(0,m)$整插值问题,得到了它在B_σ^2中有唯一解的充要条件,给出这种插值函数的明显表达式,还讨论了收敛性和收敛速度.

关键词 缺项整插值,唯一解,收敛速度.
分类号 AMS(1991) 41A05/CCL O174.41

一 引言和结果

最近,A. Sharma, J. Szabados 和 R. S. Varga[1] 研究了双周期三角$(0,m)$插值问题.自然会提出相应的双周期缺项整插值问题:给定自然数m和等距结点$x_{k,\sigma}=\frac{k\pi}{\sigma}$,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,其中$\sigma$为正数,以及满足条件$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|\alpha_{k,\sigma}|<\infty$,$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|\beta_{k,\sigma}|<\infty$的数列$\{\alpha_{k,\sigma}\}_{k=-\infty}^{\infty}$、$\{\beta_{k,\sigma}\}_{k=-\infty}^{\infty}$,问在什么条件下,存在唯一确定的整函数$R(x)\in B_\sigma^2$,使得

$$R(x_{2k,\sigma})=\alpha_{k,\sigma},\quad R^{(m)}(x_{2k+1,\sigma})=\beta_{k,\sigma},k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\tag{1}$$

成立?能否给出它的明显表达式?若$\alpha_{k,\sigma}$是已知函数$f(x)$在点$x_{2k\sigma}$的函数值,当$\sigma\to\infty$时能否有$R(x)$一致收敛于$f(x)$?收敛速度如何?

本文回答了上述问题.得到以下结果,为简便计,将$x_{k,\sigma},\alpha_{k,\sigma},\beta_{k,\sigma}$分别记作$x_k,\alpha_k,\beta_k$.

定理1 设$m\geqslant2$是偶数,$R(x)\in B_\sigma^2$且使得

$$R(x_{2k})=R^{(m)}(x_{2k+1})=0,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

则$R(x)\equiv0$.(唯一性定理)

定理2 (i) 设$m\geqslant2$是偶数,则B_σ^2中整函数$A(x)$,$B(x)$满足条件

$$\begin{aligned}&A(x_{2k})=\delta_{0k},\quad A^{(m)}(x_{2k+1})=0,\\&B(x_{2k})=0,\quad B^{(m)}(x_{2k+1})=\delta_{0k},\end{aligned}\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\tag{2}$$

的充要条件是

$$A(x)=\frac{2}{\sigma}\int_0^\sigma\frac{(\sigma-t)^m}{(\sigma-t)^m+t^m}\cos tx\,dt,\tag{3}$$

$$B(x)=(-1)^{\frac{m}{2}}\frac{2}{\sigma}\int_0^\sigma\frac{1}{(\sigma-t)^m+t^m}\cos\left[t\left(x-\frac{\pi}{\sigma}\right)\right]dt.\tag{4}$$

* 1992年6月2日收到.94年5月2日收到修改稿.

令 $R(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k A(x-x_{2k})+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k B(x-x_{2k})$，则 $R(x)\in B_\sigma^2$ 且满足条件(1).

(ii) 设 m 是奇数，则在 B_σ^2 中不存在满足条件(2)的整函数 $A(x)$，$B(x)$.

定理 3 设 $m\geqslant 2$ 是偶数，$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上有界，令

$$R_\sigma(f,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(x_{2k})A(x-x_{2k})+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k B(x-x_{2k}),$$

其中 $A(x)$，$B(x)$由(3)，(4)给出，且存在某个 $s>1$，使得

$$\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\beta_k|^s\}^{\frac{1}{s}}=o(\sigma^{m-1+\frac{1}{r}}),\ \frac{1}{s}+\frac{1}{r}=1,$$

则 $R_\sigma(f,x)$在 $f(x)$的每个连续点收敛于 $f(x)$；如果 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上有界且一致连续，则 $R_\sigma(f,x)$一致收敛于 $f(x)$.

定理 4 $m\geqslant 2$ 是偶数，$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上有界且一致连续，令

$$\overline{R}_\sigma(f,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(x_{2k})A(x-x_{2k}),$$

其中 $A(x)$是由(3)给出的. 则我们有

$$\|\overline{R}_\sigma(f,x)-f(x)\|_\infty=O(1)\sigma^{-m}\sum_{k=0}^{[\sigma]}(k+1)^{m-1}E_k(f). \tag{5}$$

注 若 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上有界且一致连续，则$\lim\limits_{\sigma\to\infty}E_\sigma(f)=0$，且 $\sigma^{-m}\sum_{k=0}^{[\sigma]}(k+1)^{m-1}E_k(f)\leqslant [\sigma]^{-1}\sum_{k=0}^{[\sigma]}E_k(f)\to 0,\sigma\to\infty$. 于是由定理 4 可知 $\overline{R}_\sigma(f,x)$在$(-\infty,\infty)$上一致收敛于 $f(x)$；还可知对于相当光滑的函数 f，即满足 $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{m-1}E_k(f)<\infty$ 的 f，$\|\overline{R}_\sigma(f,x)-f(x)\|_\infty$可以达到 $O(\sigma^{-m})$.

为节省篇幅，除特别说明外，本文所需预备知识及记号均见[2]的整插值部分.

二 几个引理

引理 1 设 $U(x)\in B_\sigma^2$，对 $f\in L^\infty(R)$定义

$$(Uf)(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(x_{2k+1})U(x-x_{2k}),$$

则有

$$U(x_{2k+1})=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\{\int_{-\sigma}^{0}[\hat{U}(t)-\hat{U}(t+\sigma)]e^{itx_{2k+1}}dt+\int_{0}^{\sigma}[\hat{U}(t)-\hat{U}(t-\sigma)]e^{itx_{2k+1}}dt\}; \tag{6}$$

$$\begin{aligned}(Uf)(x)=\frac{\sigma}{2\pi}[&\int_{-\sigma}^{\sigma}\hat{f}(t)\hat{U}(t)e^{it(x+\frac{\pi}{\sigma})}dt+e^{-ix\sigma}\int_{0}^{\sigma}\hat{f}(t)\hat{U}(t-\sigma)e^{it(x+\frac{\pi}{\sigma})}dt\\&+e^{ix\sigma}\int_{-\sigma}^{0}\hat{f}(t)\hat{U}(t+\sigma)e^{it(x+\frac{\pi}{\sigma})}dt],\ \forall f\in B_\sigma^2.\end{aligned} \tag{7}$$

证明 $\forall\ U(x)\in B_\sigma^2$，由 $L^2(-\sigma,\sigma)\subset L^1(-\sigma,\sigma)$及 Fourier 逆变换公式，我们有

$$U(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\hat{U}(t)e^{itx}dt,x\in R.$$

作变量替换得到

$$\int_0^\sigma \hat{U}(t)e^{itx_{2k+1}}dt = -\int_{-\sigma}^0 \hat{U}(t+\sigma)e^{itx_{2k+1}}dt,$$

$$\int_{-\sigma}^0 \hat{U}(t)e^{itx_{2k+1}}dt = -\int_0^\sigma \hat{U}(t-\sigma)e^{itx_{2k+1}}dt,$$

由此即可得(6). 对任意的 $f\in B_\sigma^2$ 和固定的 $x\in R$, 令

$$g_x(t) = f(t+\frac{\pi}{\sigma})U(x-t),\ t\in R,$$

则 $g_x\in B_{2\sigma}^1$, $\widehat{[g_x]}(y)=0$, $|y|\geqslant 2\sigma$, 且

$$\widehat{[g_x]}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R f(t+\frac{\pi}{\sigma})U(x-t)e^{-ity}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\frac{\pi}{\sigma}y}\int_R [f(u)e^{iuy}]U(x+\frac{\pi}{\sigma}-u)du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\frac{\pi}{\sigma}y}\int_R \hat{f}(t+y)\hat{U}(t)e^{it(x+\frac{\pi}{\sigma})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ixy}\int_{y-\sigma}^{y+\sigma}\hat{f}(t)\hat{U}(t-y)e^{it(x+\frac{\pi}{\sigma})}dt, \tag{8}$$

其中用到 Parseval 公式和以下事实:

$$\widehat{[f(\cdot)e^{-iy\cdot}]}(t) = \hat{f}(t+y),$$

$$\widehat{[U(x+\frac{\pi}{\sigma}-\cdot)]}(t) = \begin{cases}\hat{U}(t)e^{it(x+\frac{\pi}{\sigma})}, & \text{a.e. } t\in[-\sigma,\sigma],\\ 0, & \text{a.e. } t\in R-[-\sigma,\sigma].\end{cases}$$

直接计算表明, $[g_x]\in L^1(R)\cap C(R)$, $g_x\in L^1(R)\cap AC(R)$, 应用 Poisson 求和公式([4])得到

$$(Uf)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_x(x_{2k}) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{[g_x]}(k\sigma)$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\{\widehat{[g_x]}(0) + \widehat{[g_x]}(\sigma) + \widehat{[g_x]}(-\sigma)\} \tag{9}$$

由(8)和(9)便得到(7).

引理 2 若 $U(x)\in B_\sigma^2$, 则 $U(x_{2k+1})=\delta_{0k}$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 的充要条件是

$$\hat{U}(t) - \hat{U}(\sigma+t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}e^{-i\frac{\sigma}{\pi}t},\quad \text{a.e. } t\in(-\sigma,0), \tag{10}$$

$$\hat{U}(t) - U(t-\sigma) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}e^{-i\frac{\sigma}{\pi}t},\quad \text{a.e. } t\in(0,\sigma). \tag{11}$$

证明 必要性. 由 $U(x_{2k+1})=\delta_{0k}$, 易知

$$(Uf)(x_{2k+1}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x_{2j+1})U(x_{2k+1}-x_{2j}) = f(x_{2k+1}),\ \forall\ f\in B_\sigma^2. \tag{12}$$

构造函数 $f_v(x) = \frac{1}{v}\int_0^v e^{itx}dt\,(0<v<\sigma)$, 由(7)式得到

$$(Uf_0)(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}v}\Big(\int_0^v \hat{U}(t)e^{it(x+\frac{\pi}{\sigma})}dt + e^{-ix\sigma}\int_0^v \hat{U}(t-\sigma)e^{it(x+\frac{\pi}{\sigma})}dt\Big),$$

再考虑到(12)式, 就有

$$\frac{1}{v}\int_0^v e^{itx_{2k+1}}dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}v}\Big(\int_0^v \hat{U}(t)e^{it(x_{2k+1}+\frac{\pi}{\sigma})}dt + e^{-ix_{2k+1}\sigma}\int_0^v \hat{U}(t-\sigma)e^{it(x_{2k+1}+\frac{\pi}{\sigma})}dt\Big),$$

于是 $e^{ivx_{2k+1}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}[\hat{U}(v) - \hat{U}(v-\sigma)]e^{iv(x_{2k+1}+\frac{\pi}{\sigma})}$, 由此便推出(11)式成立. 类似地可证(10).

充分性由(6)式立得.

引理 3 若 $U(x)\in B_\sigma^2$,则 $U(x_{2k+1})=0,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$的充要条件是

$$\hat{U}(t)-\hat{U}(t+\sigma)=0,\quad \text{a.e. } t\in(-\sigma,0),$$
$$\hat{U}(t)-\hat{U}(t-\sigma)=0,\quad \text{a.e. } t\in(0,\sigma).$$

证明与引理 2 的证明类似.

引理 4 设 $m\geqslant 2$ 是偶数,$A(x),B(x)$分别由(3),(4)给出,则 $\|A\|_1\leqslant c\sigma^{-1}$; $\|B\|_r\leqslant c\sigma^{-m-\frac{1}{r}}$,$\forall\ r>1$,其中 c 是不依赖于 σ 的常数.

证明 记 $\varphi_\sigma(t)=\dfrac{(\sigma-t)^m}{(\sigma-t)^m+t^m}$,易见 $\varphi_\sigma(\sigma)=0$,计算可知 $\varphi_\sigma'(\sigma)=0$; $|\varphi_\sigma''(t)|\leqslant c\sigma^{-2},t\in R$.两次分部积分可得

$$A(x)=\frac{2}{\sigma}\int_0^\sigma\varphi_\sigma(t)\cos tx dx=\frac{2}{\sigma}\int_0^\sigma\frac{1-\cos tx}{x^2}\varphi_\sigma''(t)dt,$$

故

$$\int_R|A(x)|dx\leqslant\int_R\frac{2}{\sigma}\int_0^\sigma\frac{1-\cos tx}{x^2}|\varphi_\sigma''(t)|dtdx\leqslant c\sigma^{-3}\int_0^t tdt\int_R\frac{1-\cos u}{u^2}du=O(\sigma^{-1}).$$

其中用到 $\int_R\frac{1-\cos u}{u^2}du<+\infty$,这就证明了 $\|A\|_1\leqslant c\sigma^{-1}$.

记 $\psi_\sigma(t)=\dfrac{1}{(\sigma-t)^m+t^m}-\dfrac{1}{\sigma^m}$,则

$$B(x+\frac{\pi}{\sigma})=(-1)^{\frac{m}{2}}\frac{2}{\sigma}\int_0^\sigma\frac{\cos tx}{(\sigma-t)^m+t^m}dt=(-1)^{\frac{m}{2}}[\frac{2}{\sigma}\int_0^\sigma\psi_\sigma(t)\cos tx dt+\frac{2}{\sigma^m}\frac{\sin\sigma x}{\sigma x}].$$

注意到 $\psi_\sigma(0)=\psi_\sigma(\sigma)=0$,两次分部积分得

$$\begin{aligned}B(x+\frac{\pi}{\sigma})&=(-1)^{\frac{m}{2}}[-\frac{2}{\sigma}\frac{1-\cos\sigma x}{x^2}\psi_\sigma'(\sigma)+\frac{2}{\sigma}\int_0^\sigma\frac{1-\cos tx}{x^2}\psi_\sigma''(t)dt+\frac{2}{\sigma^m}\frac{\sin\sigma x}{\sigma x}]\\&=(-1)^{\frac{m}{2}}[B_1(x)+B_2(x)+B_3(x)].\end{aligned}$$

计算可知 $\psi_\sigma'(\sigma)=\dfrac{-m}{\sigma^{m+1}}$,$|\psi_\sigma''(t)|\leqslant\dfrac{c}{\sigma^{m+2}}$,$t\in R$.故有

$$\|B_3\|_r=\frac{2}{\sigma^m}(\int_R|\frac{\sin\sigma x}{\sigma x}|^r dx)^{\frac{1}{r}}=O(\sigma^{-m-\frac{1}{r}}),\ \forall\ r>1;$$
$$\|B_2\|_r\leqslant\frac{2}{\sigma}\int_0^\sigma\{\int_R|\frac{1-\cos tx}{x^2}|^r dx\}^{\frac{1}{r}}|\psi_\sigma''(t)|dt=O(\sigma^{-m-\frac{1}{r}}),\ \forall\ r\geqslant 1;$$
$$\|B_1\|_r\leqslant 2\sigma^{1-\frac{1}{r}}\psi_\sigma'(\sigma)(\int_R|\frac{1-\cos u}{u^2}|^r dx)^{\frac{1}{r}}=O(\sigma^{-m-\frac{1}{r}}),\forall\ r\geqslant 1,$$

其中用到 $\int_R|\frac{\sin u}{u}|^r du<+\infty,\forall\ r>1$,以及 Hölder-Minkowski 不等式[4],至此,已有 $\|B\|_r=O(\sigma^{-m-\frac{1}{r}})$.

引理 5 设 $A(x)$由(3)给出,则

(i) $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}A(x-x_{2k})\equiv 1$; (ii) $\sum\limits_{|x-x_{2k}|>\delta}|A(x-x_{2k})|\leqslant c(1+\delta)\delta^{-2}\sigma^{-1}$,

其中 c 是常数,δ 是任意正数.

证明可参看[2]中引理 2.4 的证明.

引理 6 设 $g_\sigma(x)$是 $f(x)$的指数$\leqslant\sigma$ 的最佳逼近整函数，则

$$\max(\|g_\sigma^{(m)}\|_\infty,\|\tilde{g}_\sigma^{(m)}\|_\infty)\leqslant 2^{2m+1}\sum_{k=0}^{[\sigma]}(k+1)^{m-1}E_k(f),\tag{13}$$

其中 $E_\sigma(f)=\inf\{\|f-g\|_\infty : g\in B_\sigma^\infty\}$，$\tilde{g}$ 是 g 的共轭函数.

证明 因(13)两边用 $f(x)+c$ 代替 $f(x)$时保持不变，故可假设 $g_0(x)=0$，选取自然数 k，使 $2^k<\sigma\leqslant 2^{k+1}$，易见

$$\|g_1\|_\infty=\|g_1-g_0\|_\infty\leqslant 2E_0(f),\ \|g_{2^j}-g_{2^{j-1}}\|_\infty\leqslant 2E_{2^{j-1}}(f),\ j=1,2,\cdots,k,$$
$$\|g_\sigma-g_{2^k}\|_\infty\leqslant 2E_{2^k}(f).$$

再由 Bernstein 不等式[3]

$$\sup_{x\in R}|G^{(m)}(x)|\leqslant\sigma^m\sup_{x\in R}|G(x)|,\ \sup_{x\in R}|\tilde{G}^{(m)}(x)|\leqslant\sigma^m\sup_{x\in R}|G(x)|,\ \forall\ G\in B_\sigma^\infty,$$

有

$$\|g_1^{(m)}\|_\infty\leqslant 2E_0(f),\quad \|\tilde{g}_1^{(m)}\|_\infty\leqslant 2E_0(f);$$
$$\|(\cancel{g_{2^j}-g_{2^{j-1}}})^{(m)}\|_\infty\leqslant 2\cdot 2^{jm}E_{2^{j-1}}(f),$$
$$\|(g_{2^j}-g_{2^{j-1}})^{(m)}\|_\infty\leqslant 2\cdot 2^{jm}E_{2^{j-1}}(f),\ j=1,2,\cdots,k;$$
$$\|(g_\sigma-g_{2^k})^{(m)}\|_\infty\leqslant 2\cdot 2^{km}E_{2^k}(f),\quad \|(g_0-g_{2^k})^{(m)}\|_\infty\leqslant 2\cdot 2^{km}E_{2^k}(f).$$

又因 $g_\sigma(x)=g_\sigma(x)-g_{2^k}(x)+\sum\limits_{j=1}^{k}[g_{2^j}(x)-g_{2^{j-1}}(x)]+g_1(x)$，我们得到

$$\max\{\|g_\sigma^{(m)}\|_\infty,\|\tilde{g}_\sigma^{(m)}\|_\infty\}\leqslant 2E_0(f)+\sum_{j=1}^{k+1}2^{jm+1}E_{2^{j-1}}(f)\leqslant 2^{2m+1}\sum_{j=0}^{[\sigma]}(j+1)^{m-1}E_j(f).$$

三 定理的证明

定理 1 的证明 由 $R(x)\in B_\sigma^2$ 知 $R^{(m)}(x)\in B_\sigma^2$，又 $R(x_{2k})=0$，$R^{(m)}(x_{2k+1})=0$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，对 $R^{(m)}(x)$和 $R(x)$分别应用引理 3 和[2]中定理 2.3，得方程组

$$\begin{cases}\hat{R}^{(m)}(t)-\hat{R}^{(m)}(t+\sigma)=0,\ \text{a.e.}\ t\in(-\sigma,0),\\ \hat{R}^{(m)}(t)-\hat{R}^{(m)}(t-\sigma)=0,\ \text{a.e.}\ t\in(0,\sigma),\\ \hat{R}(t)+\hat{R}(t+\sigma)=0,\ \text{a.e.}\ t\in(-\sigma,0),\\ \hat{R}(t)+\hat{R}(t-\sigma)=0,\ \text{a.e.}\ t\in(0,\sigma).\end{cases}$$

注意到 $\hat{R}^{(m)}(t)=(it)^m\hat{R}(t)$，解上述方程组得 $\hat{R}(t)=0$，$a.e.\ t\in(-\sigma,\sigma)$，故

$$R(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\hat{R}(t)e^{ixt}dt=0,x\in R.$$

定理 2 的证明 设 $m\geqslant 2$ 是偶数，$A(x),B(x)\in B_\sigma^2$ 且满足条件(2). 分别对 $A^{(m)}(x)$和 $A(x)$应用引理 3 和[2]中定理 2.2，得方程组

$$\begin{cases}\hat{A}^{(m)}(t)-\hat{A}^{(m)}(t+\sigma)=0,\ \text{a.e.}\, t\in(-\sigma,0),\\ \hat{A}^{(m)}(t)-\hat{A}^{(m)}(t-\sigma)=0,\ \text{a.e.}\, t\in(0,\sigma),\\ \hat{A}(t)+\hat{A}(t+\sigma)=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sigma},\ \text{a.e.}\, t\in(-\sigma,0),\\ \hat{A}(t)+\hat{A}(t-\sigma)=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sigma},\ \text{a.e.}\, t\in(0,\sigma).\end{cases}$$

注意到 $\hat{A}^{(m)}(t)=(it)^m\hat{A}(t)$，由上述方程组解得

$$\hat{A}(t)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\frac{(\sigma-|t|)^m}{(\sigma-|t|)^m+|t|^m},\quad a.e.\, t\in(-\sigma,\sigma). \tag{14}$$

分别对 $B^{(m)}(x)$ 和 $B(x)$ 应用引理 2 和[2]中定理 2.3 类似地解得

$$\hat{B}(t)=(-1)^{\frac{m}{2}}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\frac{1}{(\sigma-|t|^m+|t|^m}e^{-i\frac{\pi}{\sigma}t},\ \text{a.e.}\, t\in(-\sigma,\sigma). \tag{15}$$

由(14),(15)便得(3),(4).

若 $A(x)$,$B(x)$ 由(3),(4)给出，则实际计算可知 $A(x)$,$B(x)$ 满足条件(2)，于是 $R(x)$ 满足条件(1). 由 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_k$ 和 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\beta_k$ 的绝对收敛，知 $R(x)\in B_\sigma^2$. 由定理 1 还知满足条件(1)的 $R(x)\in B_\sigma^2$ 是唯一的. (i)得证.

由上述证明过程易见，若 m 是奇数，在 B_σ^2 中不存在满足条件(2)的整函数 $A(x)$,$B(x)$.

定理 3 的证明 要用到引理 4，引理 5 和不等式

$$\sup_{x\in R}\{h\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|f(x-x_k)|^p\}^{\frac{1}{p}}\leqslant(1+\sigma h)\|f\|_p, \tag{16}$$

其中 $f\in B_\sigma^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，$x_k=kh$. 具体证明过程类似[2]中定理 2.4 的证明，不赘述.

定理 4 的证明 由不等式(16)和引理 4 得到

$$\frac{2\pi}{\sigma}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|A(x-x_{2k})|\leqslant(1+2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}|A(x)|dx=O(\sigma^{-1}).$$

故 $\|\overline{R}_\sigma\|=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|A(x-x_{2k})|=O(1)$.

设 g_σ 是 f 的 σ 阶最佳逼近整函数，则由[6]的引理 2.6 及本文引理 6，我们得到

$$\begin{aligned}\|f-\overline{R}_\sigma(f)\|_\infty&\leqslant\|f-g_\sigma\|_\infty+\|g_\sigma-\overline{R}_\sigma(g_\sigma)\|_\infty+\|\overline{R}_\sigma(g_\sigma-f)\|_\infty\\&\leqslant(1+\|\overline{R}_\sigma\|)E_\sigma(f)+O(1)\sigma^{-m}\sum_{k=0}^{[\sigma]}(k+1)^{m-1}E_k(f)\\&\leqslant O(1)[E_\sigma(f)+\sigma^{-m}\sum_{k=0}^{[\sigma]}(k+1)^{m-1}E_k(f)].\end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned}\frac{E_\sigma(f)}{\sigma^{-m}\sum_{k=0}^{[\sigma]}(k+1)^{m-1}E_k(f)}&\leqslant\{\sum_{k=0}^{[\sigma]}(\frac{k+1}{[\sigma]+1})^{m-1}\frac{1}{[\sigma]+1}\}^{-1}\\&\to(\int_0^1 t^{m-1}dt)^{-1}=m,\ \sigma\to+\infty,\end{aligned}$$

故 $E_\sigma(f) = O(\sigma^{-m}\sum_{k=0}^{[\sigma]}(k+1)^{m-1}E_k(f))$．由此，定理 4 得证.

作者衷心感谢孙永生教授的指导和刘永平同志的帮助.

参 考 文 献

[1] A. Sharma, J. Szabados and R. S. Varga, *2-Periodic lacunary trigonometric interpolation: the (O, M) case*, in *Constructive Theory of Functions' 87*, Publishing House of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1988, 420—427.

[2] Liu Yongping, *On the trigonometric interpolation and entire interpolation*, Approx. Theory and Appl., 6:4(1990), 85—106.

[3] А. Ф. Тиман, Теория приближения Хинкции действительного переменного, Масква, 1960.

[4] P. L. Butzer and R. L. Stens, *The Poisson summation formula, Whittaker's Cardial series and approximate integration*, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings V3(1983), 19—36.

[5] P. L. Butzer and R. J. Nessel, *Fourier analysis and approximation*, Vol. 1, Basel; Birkhauser; New york; Academic press, 1971.

[6] Liu Yongping, *Approximation properties of certain interpolation operators of entire exponential type in L_p spaces*, Acta Mathematica Sinica, New Series, 7:4(1991), 289—308.

A 2-Periodic Lacunary Entire Interpolation Problem

Hou Xiangqian

(Dept. of Math., Ningxia University, Yinchuan)

Abstract

In this paper, we study a 2-periodic entire $(0, m)$ interpolation problem on equidistant nodes. We establish some equivalent conditions and find the explicit forms of some interpolation functions on the interpolation problems. The convergence problem is also discussed.

Keywords lacunary entire interpolation, unique solution, convergence rate.