第15卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 15 No. 3
1995年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1995

奇异二阶拟线性椭圆型方程 Dirichlet 问题（Ⅲ）*

张　志　军
（西北师范大学数学系，兰州 730070）

摘　要　本文应用摄动方法、上下解方法、截断函数方法，得到了一类带奇异项的二阶拟线性椭圆型方程 Dirichlet 问题正解的存在性和正则性，发展了文献[1]－[7]的相应工作.

关键词　奇异方程，摄动方法，上下解方法，截断函数方法，解的存在性和正则性.

分类号　AMS(1991) 35J25/CCL O175.25

§1　引　言

本文讨论如下问题

$$\begin{cases} -\Delta u=\dfrac{1}{u^{a}}+\lambda g(u)-h(\nabla u), & x\in\Omega, \\ u>0, & x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性和正则性. 其中，Ω 是 $R^N(N\geqslant 1)$ 中的有界区域，并且 $\partial\Omega\in C^{2+v}$，$v\in(0,1)$；$\lambda$ 是非负参数；$a>0$ 是常数.

三十多年来，带奇异项的二阶椭圆型方程 Dirichlet 问题的研究一直很受重视. 它有许多实际背景. 问题(1)中，当 $h\equiv 0$ 时，文献[1]－[7]进行了深入的研究，特别是当 $\lambda=0$ 时，[3]和[7]研究了解的正则性.

关于问题(1)一般形式的研究，目前尚未见到有人讨论. 主要困难出现在两方面，一是出现在 $\partial\Omega$ 附近即方程的奇性困难. 因为当 $x\to\partial\Omega$ 时，不仅 u^{-a} 趋于 $+\infty$，而且 $|h(\nabla u)|$ 也可能趋于 $+\infty$. 因此，关于一般的线性或拟线性椭圆型方程的通常研究方法不能平移过来，特别是解的 $W^{2,p}(\Omega)(p>N)$ 或 $C^{2+v}(\bar{\Omega})$ 的先验估计不存在；另一方面，当 h 关于 ∇u 的增长超过二次时，又有了新的麻烦.

本文讨论两种情形. 其一是函数 h 下方有界且关于 $|\nabla u|$ 的增长不超过二次，此时，a 是任意正常数；其二是函数 h 为凸函数，$a\in(0,1)$. 应用摄动方法、上下解方法和解的估计方法，得到了问题(1)古典解的存在性和正则性. 对后一种情形在证明过程中比较关键的一步是：对逼近方程解的梯度进行全局估计. 这时，需要应用截断函数方法. 所得结果包含了[1]－[7]中有关的结果. 我们的证明方法对这类有奇性的二阶拟线性椭圆型方程的研究而言，具有一般性；

* 1992年5月21日收到. 94年4月22日收到修改稿. 国家自然科学基金资助和高等学校博士学科点专项基金资助.

另外，当 $h\equiv 0$ 时，对一般的函数 g，问题(1)解的正则性问题，也未见到有人讨论.

§2 结果和证明

定理 1 若 $\alpha\in(0,1)$，$g\in C^1([0,+\infty),R)$，$h\in C^1(R^N,R)$是凸函数，则存在 $\bar{\lambda}\in(0,+\infty]$，使得当 $\lambda\in[0,\bar{\lambda})$时，问题(1)存在解 $u_\lambda\in C^{2+\nu}(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$.

定理 2 对任意的 $\alpha>0$，$h\in C^1(R^N,R)$下方有界且满足条件

$$\limsup_{|\eta|\to+\infty}\frac{|h(\eta)|}{|\eta|^2}<+\infty,$$

则存在 $\bar{\lambda}\in(0,+\infty]$，使得当 $\lambda\in[0,\bar{\lambda})$时，问题(1)存在解 $u_\lambda\in C^{2+\nu}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$.

当 $h\equiv 0$ 时，我们还可得到：

定理 3 对任意的 $\alpha>0$，$g\in C^1([0,+\infty),(0,+\infty))$，则存在 $\bar{\lambda}^*\in(0,+\infty]$，使得当 $\lambda>\bar{\lambda}^*$ 时，问题(1)无解；而当 $\lambda\in[0,\bar{\lambda}^*)$时，问题(1)存在解 $u_\lambda\in C^{2+\nu}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$.

注 1 明显地，问题(1)无 $C^2(\bar{\Omega})$解.

注 2 当 $h\equiv 0$ 时，定理 1－定理 3 不仅包含了[1]－[7]的有关结果；而且定理 1 得到了 $\alpha\in(0,1)$，$g\not\equiv 0$ 时解的正则性；定理 3 去掉了[6]中关于 g 的单调性的假设.

在证明定理之前，我们做些准备.

本文总假定，问题(1)的解属于 $C^{2+\nu}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$. 记

$$|u|_\infty=\max_{x\in\bar{\Omega}}|u(x)|;\quad |\nabla u|_\infty=\max_{x\in\bar{\Omega}}|\nabla u(x)|.$$

记 Poisson 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=1, & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{2}$$

的唯一解为 r，则 $r\in C^2(\bar{\Omega})$，$r>0(x\in\Omega)$(见[8]).

引理 1[6] 若 $g\in C^1([0,+\infty),R)$，则存在单调增的连续可微函数 $\psi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，使得在$[0,+\infty)$内成立：

$$g\leqslant\psi.$$

引理 2[3] 对任意的 $\alpha>0$，以及 $\varepsilon>0$，如下两个问题：

$$\begin{cases}-\Delta u=(u+\varepsilon)^{-\alpha}, & x\in\Omega\\ u>0, & x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}-\Delta u=u^{-\alpha}, & x\in\Omega\\ u>0, & x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{4}$$

分别存在唯一解 $\omega_\varepsilon\in C^{2+\nu}(\bar{\Omega})$和 $\omega\in C^{2+\nu}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$，而且 ω_ε 与 ω 满足以下关系：

1° $\omega_\varepsilon\leqslant\omega\quad(x\in\bar{\Omega})$；

2° $\omega_\varepsilon\to\omega$ 在 $C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$中一致收敛；

3° 若 $\alpha\in(0,1)$，则 $\omega\in C^1(\bar{\Omega})$.

取 C_0 是正常数，满足 $h(\eta)\geqslant -C_0$，$\forall\ \eta\in R|^N$. 当 h 是凸函数时，这是可以做到的.

现在讨论摄动问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = (u+\varepsilon)^{-\alpha} + \lambda g(u) - h(\nabla u), & x \in \Omega \\ u > 0, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

下面分六个步骤来完成定理 1 的证明.

1) 对任意的 $\alpha>0$, $\lambda\geqslant 0$ 和 $h\in C^1(R^N,R)$，存在 $\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}(\lambda)>0$ 以及 $\beta=\beta(\lambda)>0$，使得当 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$ 时，$\underline{u}=\beta r$ 是问题(5)的下解.

证明 令 $a_\lambda=\min\{\lambda g(s)-h(\eta)\,|\,s\in[0,1),\eta\in R^N$ 并且 $|\eta|\leqslant 1\}$. 则存在 $R=R(\lambda)\in(0,1]$，使得对任意的 $s\in(0,R]$，有

$$s^{-\alpha}+a_\lambda\geqslant 1.$$

令

$$\beta=\min\{1,\frac{R}{2(|r|_\infty+|\nabla r|_\infty)}\};\quad \underline{u}=\beta r.$$

则 $|\underline{u}|_\infty\leqslant\frac{R}{2}$; $|\nabla\underline{u}|_\infty\leqslant\frac{R}{2}$.

取 $\bar{\varepsilon}=\frac{R}{2}$，则容易验证，当 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$ 时，$\underline{u}$ 是问题(5)的下解.

2) 对任意的 $\alpha>0$，以及以 $-C_0$ 为下界的函数 $h\in C^1(R^N,R)$，存在 $\bar{\lambda}\in(0,+\infty]$，使得当 $\lambda\in[0,\bar{\lambda})$ 时，问题(5)存在上解 $\bar{u}_\varepsilon=(M+C_0)r+\omega_\varepsilon$. 其中 M 是正常数.

证明 令 $\bar{\lambda}=\sup\limits_{M\geqslant 0}\frac{M}{\psi(|\omega|_\infty+(M+C_0)|r|_\infty)}$，其中 ψ 是由引理 1 所确定的. 因此，当 $\lambda\in[0,\bar{\lambda})$ 时，存在 $M>0$，使得

$$\lambda\leqslant\frac{M}{\psi(|\omega|_\infty+(M+C_0)|r|_\infty)}.$$

取定这样的 M 作为 $\bar{u}_\varepsilon$ 中的 M. 直接验证可知 $\bar{u}_\varepsilon$ 是问题(5)的上解.

3) 对任意的 $\alpha>0$, $\lambda\in[0,\bar{\lambda})$ 以及 $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$ 都成立：

$$\bar{u}_\varepsilon\geqslant\underline{u}\quad(x\in\bar{\Omega}).$$

证明 反证. 若集合 $\{x\in\Omega\,|\,\bar{u}_\varepsilon(x)<\underline{u}(x)\}$ 非空，取其任一连通分支 Λ_ε，当 $x\in\Lambda_\varepsilon$ 时，有

$$\begin{aligned}-\Delta\bar{u}_\varepsilon&\geqslant(u_\varepsilon+\varepsilon)^{-\alpha}+\lambda g(\bar{u}_\varepsilon)-h(\nabla\bar{u}_\varepsilon)\\&\geqslant(u_\varepsilon+\varepsilon)^{-\alpha}+a_\lambda\geqslant 1\geqslant-\Delta\underline{u}.\end{aligned}$$

既然 $(\bar{u}_\varepsilon-\underline{u})|_{\partial\Lambda_\varepsilon}=0$，应用极大值原理([8])可知，$\bar{u}_\varepsilon\geqslant\underline{u}\,(x\in\bar{\Lambda}_\varepsilon)$. 这与假设相矛盾. 因此，$\bar{u}_\varepsilon\geqslant\underline{u}\,(x\in\bar{\Omega})$.

注意到，由 1)→3)不能直接利用已有结果(如[9]得到问题(5)存在解，因为 $|h(\nabla u)|$ 关于 $|\nabla u|$ 的增长可以超过二次.

4) 在定理 1 的假设下，问题(5)存在解 $u_\varepsilon\in C^{2+\nu}(\bar{\Omega})$ 满足 $\underline{u}\leqslant u_\varepsilon\leqslant\bar{u}_\varepsilon\,(x\in\bar{\Omega})$.

证明 我们应用截断函数方法. 取截断函数 $\bar{h}\in C^1(R^N,R)$ 满足条件：

(i) $\lim\limits_{|\eta|\to\infty}\sup\frac{|\bar{h}(\eta)|}{|\eta|^2}<+\infty$;

(ii) $\bar{h}(\eta)=h(\eta)$，对任意的 $|\eta|\leqslant R_0$，其中 R_0 为待定的正常数；

(iii) $\bar{h}(\eta)\geqslant -C_0$ 是凸函数.

现在来讨论如下问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = (u+\varepsilon)^{-a} + \lambda g(u) - \bar{h}(\nabla u), & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

由 1)－3)可知，$\bar{u}_\varepsilon$ 和 $\underline{u}$ 仍然是问题(6)的上解和下解，并且 $\bar{u}_\varepsilon \geqslant \underline{u}(x\in\bar{\Omega})$. 而 $\bar{h}$ 关于 $|\nabla u|$ 的增长不超过二次，因此，由[9]可知，问题(6)存在解 $u_\varepsilon \in C^{2+\nu}(\bar{\Omega})$ 满足 $\underline{u} \leqslant u_\varepsilon \leqslant \bar{u}_\varepsilon (x\in\bar{\Omega})$.

由下面的第 5 步可知，存在与 ε 和 R_0 无关的正常数 B_0，使得 $|\nabla u_\varepsilon|_\infty \leqslant B_0$. 令 $R_0=\max\{1, B_0\}$. 由 $\bar{h}$ 的定义可知，u_ε 就是问题(5)的解.

5) $|\nabla u_\varepsilon|_\infty$ 关于 ε 和 R_0 一致有界.

证明 由 $g, h\in C^1$ 以及 $u_\varepsilon \in C^{2+\nu}(\bar{\Omega})$，应用偏微分方程的正则性理论([8])可得，对任意的 $p>1$，$u_\varepsilon \in W^{3,p}(\Omega)$.

由 4)可知，u_ε 满足

$$\beta r \leqslant u_\varepsilon \leqslant (M + C_0) r + \omega_\varepsilon$$

因 $0<a<1$，由引理 2 可知，$\omega_\varepsilon \leqslant \omega$ 以及 $\omega \in C^1(\bar{\Omega})$，因此，有

$$|u_\varepsilon|_\infty \leqslant (M + C_0)|r|_\infty + |\omega|_\infty,$$

$$\max_{\partial\Omega} |\nabla u_\varepsilon| \leqslant (M + C_0 + \beta)|\nabla r|_\infty + |\nabla\omega|_\infty$$

即 $|\nabla u_\varepsilon|$ 在 $\partial\Omega$ 上和 $|u_\varepsilon|_\infty$ 关于 ε 和 R_0 一致有界. 令

$$W = |\nabla u_\varepsilon|^2 + M_0(C - u_\varepsilon)^2, \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$LW = -\Delta W + \nabla\bar{h}(\nabla u_\varepsilon)\nabla W, \quad x \in \Omega,$$

其中，M_0 是待定的正常数，$C>|u_\varepsilon|_\infty$ 是正常数. 因 $-\Delta u_\varepsilon=(u_\varepsilon+\varepsilon)^{-a}+\lambda g(u_\varepsilon)-\bar{h}(\nabla u_\varepsilon)$，$x\in\Omega$，两边对 x_j 求导，有

$$-\Delta\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} = -a(u_\varepsilon+\varepsilon)^{-a-1}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} + \lambda g'(u_\varepsilon)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} - \nabla\bar{h}(\nabla u_\varepsilon)\nabla\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}.$$

通过通常的求导和合并运算后，可得

$$\begin{aligned} LW = &-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 - 2M_0(C-u_\varepsilon)(-\Delta u_\varepsilon + \nabla\bar{h}(\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon) \\ &- [2a(u_\varepsilon+\varepsilon)^{-(a+1)} + 2M_0 - 2\lambda g'(u_\varepsilon)]|\nabla u_\varepsilon|^2 \end{aligned}$$

因 $|u_\varepsilon|_\infty$ 一致有界，对 $\lambda\in[0,\bar{\lambda})$ 固定，存在正常数 M_0，使得

$$M_0 \geqslant \lambda g'(u_\varepsilon); \quad M_0 \geqslant \lambda g(u_\varepsilon).$$

又由 $\bar{h}$ 是凸函数，即 $\nabla\bar{h}(\nabla u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon \geqslant \bar{h}(\nabla u_\varepsilon)-\bar{h}(0)$，从而有

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon + \nabla\bar{h}(\nabla u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon &= (u_\varepsilon+\varepsilon)^{-a} + \lambda g(u_\varepsilon) - \bar{h}(\nabla u_\varepsilon) + \nabla\bar{h}(\nabla u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon \\ &\geqslant (u_\varepsilon+\varepsilon)^{-a} + \lambda g(u_\varepsilon) - \bar{h}(0) \end{aligned}$$

$$LW \leqslant 2M_0(C-u_\varepsilon)(\bar{h}(0) - \lambda g(u_\varepsilon)) \leqslant 2M_0 C(|\bar{h}(0)| + M_0)$$

即 $LW\leqslant$ 与 ε 和 R_0 无关的正常数($x\in\Omega$)，而 W 在 $\partial\Omega$ 上一致有界，应用 $W^{2,P}(\Omega)$ 中的 Bony 极大值原理(见[9])，可得 $|W|_\infty$ 关于 ε 和 R_0 一致有界，从而 $|\nabla u_\varepsilon|_\infty$ 一致有界.

6) $\{u_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon}}$ 存在子列在 $C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ 中收敛到 $u\in C^{2+\nu}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$，$u$ 就是问题(1)的解.

证明 由内估计方法(见[10])，可得 $\{u_\varepsilon\}$ 存在子序列在 $C^2(\Omega)$ 中收敛于 $u\in C^{2+\nu}(\Omega)$，在问题(5)中按上述子列取极限，立即知道，u 满足方程. 余下的问题是证明 $u\in C(\bar{\Omega})$ 并满足 0 边界

条件. 因

$$\beta r \leqslant u_\varepsilon \leqslant (M + C_0)r + \omega \ (x \in \bar{\Omega}),$$

从而

$$\beta r \leqslant u \leqslant (M + C_0)r + \omega(x \in \bar{\Omega}).$$

因此，$\lim\limits_{x\to\partial\Omega} u(x)=0$. 这就证明了：$u\in C(\bar{\Omega})$并且$u|_{\partial\Omega}=0$. 由 4)和 5)可知，$u\in C^1(\bar{\Omega})$. 定理 1 证毕.

由 1)－3)和 6)的证明过程，我们可得到定理 2. 下面证明定理 3.

定理 3 的证明 令 $\sigma=\{\lambda\geqslant 0|$问题(1)存在解$\}$；$\bar{\lambda}^*=\sup\sigma$. 则由定理 2 可知，$[0,\bar{\lambda})\subset\sigma$. 下面只需证，对任意的 $\lambda_0\in\sigma$，$[0,\lambda_0]\subset\sigma$.

对于任意的 $\lambda'\in[0,\lambda_0)$，容易验证，u_{λ_0} 是问题(5)中当 $\lambda=\lambda'$ 时的上解；由 1)可知，$\underline{u}=\beta r$ 是问题(5)的下解；而且类似于 3)的证明，可以得到 $u_{\lambda_0}\geqslant\underline{u}(x\in\bar{\Omega})$. 由 6)的证明可知，当 $\lambda=\lambda'$ 时，问题(1)存在解 $u_{\lambda'}\in C^{2+\nu}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$. 因此，集合 σ 是$[0,+\infty)$上的一个包含 0 的区间. 由 $\bar{\lambda}^*$ 的定义可知，当 $\lambda>\bar{\lambda}^*$ 时，问题(1)无解(若(1)存在弱解，则由偏微分方程的正则性理论可知([8])，解一定属于 $C^{2+\nu}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$)；而当 $\lambda\in[0,\bar{\lambda}^*)$时，问题(1)存在解 u_λ. 定理 3 获证.

本文是在导师陈文嫄教授具体指导下完成的，钟承奎副教授、张后扬博士提出了有益的建议，对此表示衷心的感谢！

参 考 文 献

[1] W. Fulks and J. S. Maybee, *A singular nonlinear equation*, Osaka Math. J., 12(1960), 1—19.

[2] C. A. Stuart, *existence and approximation of solutions of nonlinear elliptic equations*, Math. Z., 147(1974), 53—63.

[3] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz and L. Tartar, *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity*, Comm. Part. Diff. Eq., 2(1977), 193—222.

[4] S. M. Gomes, *On a singular nonlinear elliptic problem*, SiAM J. Math. Anal., 6(1986), 1359—1369.

[5] H. Usami, *On a singular elliptic boundary value problem in a ball*, Nonlinear Anal., 10(1989), 1163—1170.

[6] M. M. Coclite and G. Palmieri, *On a singular nonlinear Dirichlet problem*, Comm. Part. Diff. Eq., 10(1989), 1315—1327.

[7] A. C. Lazer and P. L. Mckenna, *On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem*, Proceeding Amer. Math. Soc., 3(1991), 721—730.

[8] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd Ed., Germany, Springer-Verlag, 1983.

[9] H. Amann and M. G. Crandall, *On some existence theorems for semilinear elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J., 27(1978), 779—790.

[10] O. A. Ladyzenskaya and N. N. Ural'treva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, English Trans. New York, Academic Press, 1968.

On Sigular Dirichlet Problems for Semilinear Elliptic Equation of Second Order (III)

Zhang Zhijun

(Northwest Normal University)

Abstract

By the approximation method, subsolution and supersolution method and cutting function method, we establish the existence and regularity of positive classical solutions of a singular Dirichlet problem.

Keywords Semilinear elliptic equation, singular nonlinearity, Dirichlet problem, existence and regularity.