第15卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 15 No. 3
1995年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1995

Noether 模的 Artin 根*

揣 建 军
(河北大学数学系，保定 071002)

摘　要　本文定义了 Noether 模的 Artin 根，给出了 Noether 半局部环上有限生成模的 Artin 根的刻划. 最后，作为 Artin 根理论的应用，给出了一个关于 Cohen-Macaulay 环的定理及一个模的用 depth 和 krull 维数表示的公式.

关键词　Artin 根，M-序列，Krull 维数.
分类号　AMS(1991) 13H99/CCL O153.3

§1　引　言

本文出现的环都是有单位元的交换环，模均指幺模. 设 M 是环 R 上的一个 Noether 模. 类似于[1]如下定义 M 的 Artin 根：设 $\Lambda(M)$ 是 M 的一个极大 Artin 子模. 若 N 是 M 的任一 Artin 子模，因 $\Lambda(M)+N$ 是 Artin 模 $\Lambda(M)\oplus N$(外部直和)的同态象，从而是 Artin 的. 由 $\Lambda(M)$ 的极大性，$N\subseteq\Lambda(M)$. 所以，$\Lambda(M)$ 是 M 的唯一最大 Artin 子模. 称 $\Lambda(M)$ 为 M 的 Artin 根. 显然有 $\Lambda(M/\Lambda(M))=0$.

设 I 是环 R 的理想，$M\neq 0$ 是一个 R-模. 用 $\mathrm{dep}_I(M)$ 表示 I 中极大 M-序列的长度. 对任意 $f\in\mathrm{Hom}_R(R/I,M)$，规则 $f\to f(1+I)$ 给出同构 $\mathrm{Hom}_R(R/I,M)\cong 0:_M I$. 一个熟知的结果是：若 R 是 Noether 环，$M\neq 0$ 是有限生成 R-模，则 $\mathrm{dep}_I(M)>0$ 当且仅当 $\mathrm{Hom}_R(R/I,M)=0$([2]Lemma 3.15).

设 $P\in\mathrm{Spec}(R)$，N 是 M_P 的 R_P-子模. 以 N^c 表示 N 在自然同态 $M\to M_P$ 下的完全反象. 我们有 $(N^c)_P=N$. 若 N 是 M 的子模，则 $(N_P)^c=\bigcup_{s\in R\setminus P}(N:_M s)$. 容易验证，若 N 是 M 的子模，$\overline{N}$ 是 N_P 的 R_P-子模，则 $(\overline{N}^c\cap N)_P=\overline{N}$. 由此可知，若 N 是 M 的 Artin 子模，则对任意 $p\in\mathrm{Spec}(R)$，N_P 是 M_P 的 Artin 子模，特别，若 M 是 Noether R-模，则 $\Lambda(M)_P\subseteq\Lambda(M_P)$.

和通常一样，$\dim(R)$ 表示 R 的 krull 维数. 若 M 是 R-模，$\dim(M)$ 表示 $\dim(R/\mathrm{Ann}(M))$.

§2　半局部情形下 Artin 根的刻划

下面研究 Noether 半局部环上有限生成模的 Artin 根的刻划.

定理 1　设 R 是 Noether 半局部环，J 是 R 的 Jacobson 根，M 是有限生成 R-模. 则

* 1992年5月24日收到.

$$A(M)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(0:_M J^n).$$

又若 M 不是 Artin 的，则 $A(M)$ 是集合

$$S=\{N\mid N\text{ 是 }M\text{ 的真子模且 }\mathrm{dep}_J(M/N)>0\}$$

的最小元.

证明 因为链 $0:_M J\subseteq 0:_M J^2\subseteq\cdots$ 是稳定的，从而对某个 n_0，$\bigcup_{n=1}^{\infty}(0:_M J^n)=0:_M J^{n_0}$. 若 $x\in 0:_M J^{n_0}$，则 $J^{n_0}(Rx)=0$，从而 Rx 作为 R/J^{n_0}-模是 Artin 的(因为 R/J^{n_0} 是 Artin 环)，因此，作为 R-模 Rx 也是 Artin 的，故 $x\in A(M)$. 现在 $A(M)$ 的子模序列 $JA(M)\supseteq J^2A(M)\supseteq\cdots$ 也是稳定的，故对某个 n 有 $J^nA(M)=J^{n+1}A(M)$. 由 Nakayama 引理，$J^nA(M)=0$，从而 $A(M)\subseteq 0:_M J^n\subseteq 0:_M J^{n_0}$.

现在设 M 不是 Artin 的，因而 $A(M)\neq M$. 因为

$$0:_{M/A(M)}J=A(M):_M J/A(M)=0:_M J^{n_0+1}/0:_M J^{n_0}=0,$$

我们有 $\mathrm{dep}_J(M/A(M))>0$，即 $A(M)\in S$. 若 N 是 M 的真子模且 $\mathrm{dep}_J(M/N)>0$，则 $0:_{M/N}J=N:_M J/N=0$，即 $N=N:_M J$. 从而对任意自然数 n，$N=N:_M J^n$. 这样 $N=N:_M J^{n_0}\supseteq 0:_M J^{n_0}=A(M)$，即 $A(M)$ 是集合 S 的最小元. 证毕.

推论 1 设 R 是 Noether 半局部环，J 是 R 的 Jacobson 根，$M\neq 0$ 是有限生成 R-模. 则

$$\mathrm{dep}_J(M)>0$$

当且仅当 $A(M)=0$.

推论 2 设 R,J,M 同上，则 M 有有限长当且仅当存在自然数 n，使 $J^nM=0$.

下面给出 Artin 根和局部化之间的关系.

定理 2 设 R 是 Noether 半局部环，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是 R 的全部极大理想，J 是 R 的 Jacobson 根，M 是有限生成 R-模. 则

$$A(M)=\bigcap_{i=1}^{n}A(M_{P_i})^c.$$

证明 首先对任意 P_i，$A(M)\subseteq(A(M)_{P_i})^c\subseteq A(M_{P_i})^c$，从而 $A(M)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}A(M_{P_i})^c$. 另一方面，由定理 1 可取一固定的自然数 m 使对任意 i，$A(M_{P_i})=0:_{M_{P_i}}P_i^mR_{P_i}$. 从而

$$A(M_{P_i})^c=(0:_{M_{P_i}}P_i^mR_{P_i})^c=((0:_M P_i^m)_{P_i})^c=\bigcup_{s\in R\setminus P_i}((0:_M P_i^m):_M s).$$

任取 $x\in\bigcap_{i=1}^{n}A(M_{P_i})^c$. 则对每个 i，存在 $s_i\in R\setminus P_i$ 使 $s_iP_i^mx=0$. 因为 $s_iR+P_i^m=R$，所以 $P_i^{2m}x=P_i^mx$. 这样 $J^{2m}x=J^mx$. 由 Nakayama 引理，$J^mx=0$，即 $x\in A(M)$. 证毕.

§3 局部情形下 Artin 根的应用

作为 Artin 根理论的应用，本节给出了一个 Noether 局部环是 Cohen-Macaulay 环的充要条件. 在局部交换代数中，有一些用 dep 和 dim 或投射维数或内射维数表示的有趣关系式或猜想，比如[3]中所列出的. 本节将给出一个模的用 dep 和 dim 表示的公式. 首先有

引理 1 设 $(R,\mathfrak{M})$ 是 Noether 局部环，M 是有限生成 R-模且不是 Artin 的. 则

$$r(\mathrm{Ann}(M))=r(\mathrm{Ann}(M/A(M))).$$

这里 $r()$ 表示对理想取根.

证明 显然有 $\mathrm{Ann}(M)\subseteq\mathrm{Ann}(M/A(M))$. 现在设 $a\in\mathrm{Ann}(M/A(M))$, 则 $aM\subseteq A(M)$. 从而存在自然数 n 使 $\mathfrak{M}^n(aM)=0$. 因此, $a^{n+1}M=0$, 即 $a\in r(\mathrm{Ann}(M))$. 证毕.

推论 3 设 R 是 Noether 局部环且不是 Artin 的. 则 $A(R)$ 含于 R 的幂零根之中.

设 $(R,\mathfrak{M})$ 是 Noether 局部环. 我们回想, R 上的非零有限生成模 M 称为 Cohen-Macaulay 模, 如果 $\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(M)=\dim(M)$. R 称为 Cohen-Macaulay 环, 如果 R 是 Cohen-Macaulay R-模. 这等价于说 $\mathfrak{M}$ 中任一极大 R-序列生成的理想(我们称这样的理想为极大正则理想)是 $\mathfrak{M}$-准素的, 也等价于说 R 中有一个由正则序列构成的参数系.

定理 3 设 $(R,\mathfrak{M})$ 是 Noether 局部环. 则 R 是 Cohen-Macaulay 环当且仅当对 R 的任意极大正则理想 I 及理想 J, $I\subseteq J\subseteq\mathfrak{M}$, 有 $\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(R/J)=0$.

证明 设 R 不是 Cohen-Macaulay 的, 则存在极大正则理想 I 使 R/I 不是 Artin 的. 从而 $A(R/I)=J/I\neq R/I$. 又

$$A(R/J)\cong A(R/I\big/A(R/I))=0,$$

由推论 1, $\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(R/J)>0$. 反过来, 若存在极大正则理想 I 及理想 J, $I\subseteq J\subseteq\mathfrak{M}$, 使 $\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(R/J)>0$. 则 R/J 不是 Artin 的. 因为 R/J 是 R/I 的同态象, 所以 R/I 不是 Artin 的, 这是说 R 不是 Cohen-Macaulay 环. 证毕.

现在设 $M\neq 0$ 是 Nother 局部环 $(R,\mathfrak{M})$ 上的有限生成模. 设 $x_{01},\cdots,x_{0n_0}$ 是 $\mathfrak{M}$ 中一个极大 M-序列, 令 $A(M/(x_{01},\cdots,x_{0n_0})M)=M_1/(x_{01},\cdots,x_{0n_0})M$. 因 $\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(M/(x_{01},\cdots,x_{0n_0})M)=0$, 由推论 1, $M_1\neq(x_{01},\cdots,x_{0n_0})M$. 若 $M_1\neq M$, 因 $A(M/M_1)=0$, 仍由推论 1, $\mathfrak{M}$ 中存在极大 M/M_1-序列 $x_{11},\cdots,x_{1n_1}$. 令 $A(M/((x_{11},\cdots,x_{1n_1})M+M_1))=M_2/((x_{11},\cdots,x_{1n_1})M+M_1)$. 同理 $M_2\neq(x_{11},\cdots,x_{1n_1})M+M_1$. 若 $M_2\neq M$, 此过程还可继续. 一般说来, 假如我们构造了 M_i, 且 $M_i\neq M$, $A(M/M_i)=0$, 取 $\mathfrak{M}$ 中一极大 M/M_i-序列 $x_{i1},\cdots,x_{in_i}$, 令 $A(M/((x_{i1},\cdots,x_{in_i})M+M_i))=M_{i+1}/((x_{i1},\cdots,x_{in_i})M+M_i)$, 而得到 M_{i+1}. 这样我们得到了 M 的子模组成的真升链 $M_1\subset M_2\subset\cdots$. 因 M 是 Noether 模, 从而必有 l 使 $M_{l+1}=M$. 令 $M_0=0$, 我们称 $(x_{01},\cdots,x_{0n_0},M_0)$, $(x_{11},\cdots,x_{1n_1};M_1)$, $\cdots$, $(x_{l1},\cdots,x_{ln_l};M_l)$ 为 M 的一个 Artin 根列, l 称为该列的长度.

注 1 若 $\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(M)=0$, 则 $\{x_{01},\cdots,x_{0n_0}\}=\varnothing$, 此时 $M_1=A(M)$. 但对于 $i>0$, 总有 $\{x_{i1},\cdots,x_{in_i}\}\neq\varnothing$.

注 2 由构造, 对任意 i, $\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(M/M_i)=n_i$.

定理 4 设 $M\neq 0$ 是 Noether 局部环 $(R,\mathfrak{M})$ 上的有限生成模, $(x_{01},\cdots,x_{0n_0};M_0)$, $(x_{11},\cdots,x_{1n_1};M_1)$, $\cdots$, $(x_{l1},\cdots,x_{ln_l};M_l)$ 是 M 的一个 Artin 根列. 则

$$\sum_{i=0}^{l}\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(M/M_i)=\dim(M).$$

又若 $M=R$, 则 $\bigcup_{i=0}^{l}\{x_{i1},\cdots,x_{in_i}\}$ 构成 R 的一个参数系.

证明 对 l 用归纳法. 设 $l=0$. 若 $\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(M)=0$, 则 M 是 Artin 模, 从而 $R/\mathrm{Ann}(M)$ 是 Artin 环, 有 $\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(M)=\dim(M)$. 若 $\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(M)=n_0>0$, 因 $M/(x_{01},\cdots,x_{0n_0})M$ 是 Artin 模, 由[4]的第六章的引理 4, $0=\dim(M/(x_{01},\cdots,x_{0n_0}M)=\dim(M)-n_0=\dim(M)-\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(M)$, 即

$$\dim(M)=\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(M).$$

现在设 $l>0$, 对 $i\geqslant 1$, 令 $\overline{M}_i=M_i/M_1$. 显然 $(x_{11},\cdots,x_{1n_1};\overline{M}_1)$, $(x_{21},\cdots,x_{2n_2};\overline{M}_2)$, $\cdots$, $(x_{l1},\cdots,x_{ln_l};$

$\overline{M}_l$)构成 $\overline{M}=M/M_1$ 的一个 Artin 根列. 由归纳假设有

$$\sum_{i=1}^{l}\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(\overline{M}/\overline{M}_i)=\dim(\overline{M}).$$

显然 $\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(\overline{M}/\overline{M}_i)=\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(M/M_i)$. 又由引理 1 及[4]的第六章的引理 4, $\dim(\overline{M})=\dim(M/M_1)$ $=\dim(M/(x_{01},\cdots,x_{0n_0})M)=\dim(M)-n_0=\dim(M)-\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(M/M_0)$. 从而 $\sum_{i=0}^{l}\mathrm{dep}_{\mathfrak{M}}(M/M_i)=\dim(M)$.

关于定理的第二部分,我们只需证明 $\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}Rx_{ij}$ 是 R 的 $\mathfrak{M}$-准素理想. 以 $\mathfrak{U}_i$ 代替 M_i. $l=0$ 时显然成立. 设 $l>0$, 令 $\overline{R}=R/\mathfrak{U}_1$, $\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}/\mathfrak{U}_1$, 对 $i\geqslant 1$, 令 $\overline{\mathfrak{U}}_i=\mathfrak{U}_i/\mathfrak{U}_1$, $\bar{x}_{ij}=x_{ij}+\mathfrak{U}_1$. 显然 $(\bar{x}_{11},\cdots,\bar{x}_{1n_1};\overline{\mathfrak{U}}_1)$, $(\bar{x}_{21},\cdots,\bar{x}_{2n_2};\overline{\mathfrak{U}}_2)$, $\cdots$, $(\bar{x}_{l1},\cdots,\bar{x}_{ln_l};\overline{\mathfrak{U}}_l)$ 构成环 $\overline{R}$ 的一个 Artin 根列, 由归纳假设 $\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}Rx_{ij}+\mathfrak{U}_1$ 是 $\mathfrak{M}$-准素的, 从而存在自然数 n 使 $\mathfrak{M}^n\subseteq\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}Rx_{ij}+\mathfrak{U}_1$. 又由推论 3, 存在自然数 m 使 $\mathfrak{U}_1^m\subseteq\sum_{j=1}^{n}Rx_{0j}$. 所以, $\mathfrak{M}^{nm}\subseteq\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}Rx_{ij}$, 即 $\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=1}^{n_i}Rx_{ij}$ 是 $\mathfrak{M}$-准素的. 证毕.

设 M 是 Noether 局部环上的非零有限生成模, 则 M 是 Cohen-Macaulay 模当且仅当 M 的任意 Artin 根列的长度为 0. 但还不知道是否在一般情况下 M 的所有 Artin 根列都有相同长度.

参 考 文 献

[1] A. W. Chatters, C. R. Hajarnavis and N. C. Norton, *The Artin radical of a Noetherian ring*, J. Austral. Math. Soc., 23(series A), 379—384, 1977.

[2] S. Balcerzyk and T. Józefiak, *Commutative Rings*, PWN, p104, 1989.

[3] P. Roberts, *Homological Invariants of Modules Over Commutative Rings*, Les Press de l' Université de Motréal, 1980.

[4] H. Matsumura, *Commutative Algebra (second edition)*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc, p105, 1980.

[5] M. F. 阿蒂亚, I. G. 麦克唐纳, 交换代数导引, 冯绪宁等译, 科学出版社, 1982.

The Artin Radical of a Noetherian Module

Chuai Jianjun

(Department of Mathematics, Hebei University, Baoding 071002)

Abstract

In this paper we define the Artin radical of a Noetherian module and discuss the Artin radical of a finitely generated module over a semilocal Noetherian ring. As applications we give a theorem for Cohen-Macaulay rings and a formula for modules in terms of depth and Krull dimension.

Keywords Artin radical, M-sequence, Krull dimension.