第15卷第3期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 3
1995年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1995

H^*-有理模和右 Smash 积 $A\#_H^R H^*$ *

陈 惠 香
(杨州大学师范学院数学系，225002)

摘 要 本文对 H^* 上的有理模 M 做了一些讨论，刻划了此类模的某些性质，并利用这些性质得到了右 Smash 积 $A\#_H^R[kG]^*$ 上模 M 是完全可约模的条件.

关键词 有理模，Smach 积
分类号 AMS(1991) 16D/CCL O153.3

本文在一个基础域 k 上讨论，映射均为 k-线性的，$\otimes=\otimes_k$，$\mathrm{Hom}=\mathrm{Hom}_k$. 代数都是有单位元的 k-代数，模为 模且是 k-空间. 对 Hopf 代数及有关记号参阅文[1].

设 M 是左 H^*-模，命

$$\rho: M\to \mathrm{Hom}(H^*,M),\ \rho(m)(h^*)=h^*m,$$

$$\lambda: M\otimes H\to \mathrm{Hom}(H^*,M),\ \lambda(m\otimes h)(h^*)=\langle h^*,h\rangle m,$$

其中 $m\in M, h^*\in H^*, h\in H$. 如果 $\rho(M)\subseteq\lambda(M\otimes H)$，则称 M 为有理 H^*-模[1].

设 Hopf 代数 $H=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}C_\alpha$，$C_\alpha$ 为 H 的非零子余代数，$\pi_\alpha: H\to C_\alpha$ 是自然投射. 再设 M 是有理 H^*-模，则 M 是右 H-余模，结构映射 $\rho: M\to M\otimes H$ 由式子 $\rho(m)(h^*)=h^*m$ 确定，其中 $m\in M$，$h^*\in H^*$，且 $M\otimes H=\lambda(M\otimes H)\subseteq\mathrm{Hom}(H^*,M)$. 考虑合成映射

$$\eta_\alpha: M\xrightarrow{\rho}M\otimes H\xrightarrow{I\otimes\pi_\alpha}M\otimes C_\alpha\xrightarrow{I\otimes\varepsilon}M\otimes k\xrightarrow{\simeq}M,$$

命 $M_\alpha=I_m\eta_\alpha=\eta_\alpha(M)$，$\alpha\in\Gamma$.

引理 1 设 $H=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}C_\alpha$，$M$，$M_\alpha$ 如上所述，则以下三个集合相等：

(1) $\{m\in M\mid\rho(m)\in M_\alpha\otimes C_\alpha\}$； (2) $\{m\in M\mid\rho(m)\in M\otimes C_\alpha\}$； (3) M_α.

证明 (1)$\subseteq$(2)和(2)$\subseteq$(3)是显然的.

(3)$\subseteq$(1) 任取 $m\in M_\alpha$，则存在 $x\in M$ 使得 $m=\eta_\alpha(x)$. 由 $M\otimes H=\bigoplus_{\beta\in\Gamma}(M\otimes C_\beta)$ 可设 $\rho(x)=\sum_{\beta\in\Gamma}x_\beta$，其中 $x_\beta\in M\otimes C_\beta$ 且至多只有有限多个 x_β 非零. 设 $x_\alpha=\sum_{i=1}^{n}m_i\otimes c_i, m_i\in M, c_i\in C_\alpha$ 且 $\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ 是线性无关的，则 $m=\mu(I\otimes\varepsilon)(x_\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(c_i)m_i$. 因为 $(\rho\otimes I)\rho=(I\otimes\Delta)\rho$，所以 $\sum_{\beta\in\gamma}(\rho\otimes I)(x_\beta)=\sum_{\beta\in\Gamma}(I\otimes\Delta)(x_\beta)$. 又因 $M\otimes H\otimes H=\bigoplus_{\beta\in\Gamma}(M\otimes H\otimes C_\beta)$，而且

$$(\rho\otimes I)(x_\beta)\in(\rho\otimes I)(M\otimes C_\beta)\subseteq M\otimes H\otimes C_\beta,$$

* 1992年7月7日收到. 94年4月22收到修改稿.

$$(I\otimes\Delta)(x_\beta)\in(I\otimes\Delta)(M\otimes C_\beta)\subseteq M\otimes C_\beta\otimes C_\beta\subseteq M\otimes H\otimes C_\beta,$$

所以$(\rho\otimes I)(x_\beta)=(I\otimes\Delta)(x_\beta)$，$\forall\ \beta\in\Gamma$. 因此

$$(\rho\otimes I)(x_\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\rho(m_i)\otimes c_i=(I\otimes\Delta)(x_\alpha)\in M\otimes C_\alpha\otimes C_\alpha,$$

从而 $\rho(m_i)\in M\otimes C_\alpha$. 由(2)⊆(3)得 $m_i\in M_\alpha$. 于是

$$\rho(m)=\rho(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(c_i)m_i)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(c_i)\rho(m_i)=(I\otimes\mu)(I\otimes I\otimes\varepsilon)(\rho\otimes I)(\sum_{i=1}^{n}m_i\otimes c_i)$$

$$=(I\otimes\mu)(I\otimes I\otimes\varepsilon)(I\otimes\Delta)(x_\alpha)=x_\alpha=\sum_{i=1}^{n}m_i\otimes c_i\in M_\alpha\otimes C_\alpha.$$

定理 2 设 $H=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}C_\alpha$，$M$，$M_\alpha$ 如引理 1，则

(1) M_α 是 M 的 H-子余模，$\forall\ \alpha\in\Gamma$.

(2) $\rho(M_\alpha)\subseteq M_\alpha\otimes C_\alpha$，即 M_α 是 C_α-余模，$\forall\ \alpha\in\Gamma$.

(3) $M=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}M_\alpha$.

证明 (1)和(2)由引理 1 直接得出.

(3) 任取 $m\in M$，$\rho(m)\in M\otimes H=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}(M\otimes C_\alpha)$，所以 $\rho(m)=\sum_{\alpha\in\Gamma}x_\alpha$，其中 $x_\alpha\in M\otimes C_\alpha$，而且至多只有有限多个 x_α 非零. 由于 $(I\otimes\pi_\alpha)(x_\beta)=\begin{cases}x_\alpha, & \alpha=\beta\text{ 时}\\ 0, & \alpha\neq\beta\text{ 时}\end{cases}$，所以 $\eta_\alpha(m)=\mu(I\otimes\varepsilon)(x_\alpha)\in M_\alpha$. 于是 $m=\mu(I\otimes\varepsilon)\rho(m)=\sum_{\alpha\in\Gamma}\mu(I\otimes\varepsilon)(x_\alpha)=\sum_{\alpha\in\Gamma}\eta_\alpha(m)\in\sum_{\alpha\in\Gamma}M_\alpha$. 故 $M=\sum_{\alpha\in\Gamma}M_\alpha$.

现在设 $\sum_{\alpha\in\Gamma}m_\alpha=0$，$m_\alpha\in M_\alpha$，而且至多只有有限多个 m_α 非零，那么 $\rho(\sum_{\alpha\in\Gamma}m_\alpha)=\sum_{\alpha\in\Gamma}\rho(m_\alpha)=0$. 因为 $M\otimes H=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}(M\otimes C_\alpha)$ 且 $\rho(m_\alpha)\in M\otimes C_\alpha$，故 $\rho(m_\alpha)=0$，$\forall\ \alpha\in\Gamma$. 由于 ρ 是单射，所以 $m_\alpha=0$，$\forall\ \alpha\in\Gamma$. 故 $M=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}M_\alpha$.

推论 3 设 $H=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}C_\alpha$，$M$，$M_\alpha$ 如引理 1，则 M_α 是 M 的 H^*-子模且 $M=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}M_\alpha$.

现在设 A 是右 H-余模代数，结构映射为：$\varphi: A\to A\otimes H$，$\varphi(a)=\sum_{(a)}a_{(0)}\otimes a_{(1)}$，$a\in A$. 则 A 是有理左 H^*-模径：$h^*\rightharpoonup a=\sum_{(a)}\langle h^*,a_{(1)}\rangle a_{(0)}$，$a\in A$，$h^*\in H^*$. H-双模 H 经转置使 H^* 成为 H-双模，同时 H^* 是右(左)H-模代数. 这样可定义一个右 Smash 积 $A\#_H^RH^*$([3])：作为向量空间 $A\#_H^RH^*=A\otimes H^*$，记 $a\otimes h^*=a\#^Rh^*$；$A\#_H^RH^*$ 中乘法为 $(a\#^Rh^*)(b\#^Rg^*)=\sum_{(b)}ab_{(0)}\#^R(h^*\leftharpoonup b_{(1)})g^*$，$a,b\in A$，$h^*,g^*\in H^*$. 易证 $A\#_H^RH^*$ 是一个含单位元 $1\#^R1$ 的结合代数. 且 $A=A\#^R1$ 和 $H^*=1\#^RH^*$ 自然地成为 $A\#_H^RH^*$ 的子代数. 若 H 有限维，则 A 为左 H^*-模代数且可得到一个通常的 Smash 积[1,p155]$A\# H^*$. 可以证明，此时 $A\# H^*$ 与 $A\#_H^RH^*$ 的乘法一致. 下面把右 Smash 积 $A\#_H^RH^*$ 记作 $A\# H^*$，$a\#^Rh^*$ 记作 $a\# h^*$.

设 G 是一个群，则 $H=kG$ 为 Hopf 代数. 令 $p_g\in[kG]^*$，$g\in G$ 为：$\langle p_g,k\rangle=\delta_{g,k}$，$g,h\in G$. 如果 M 是左$[kG]^*$-模，$m\in M$，记 $l(m)$ 为 $G(m)=\{g\in G\mid p_gm\neq0\}$ 中所含元素个数. 以下总设 A 是右 kG-余数代数.

引理 4 (1) $h^*p_g=p_gh^*=\langle h^*,g\rangle p_g$，$g\in G$，$h^*\in[kG]^*$； (2) $p_g\leftharpoonup h=p_{h^{-1}g}$，$g,h\in G$.

证明 直接验证便知引理 4 成立.

定理 5 设 M 是 $[kG]^*$-模,则下述条件等价:

(1) M 是有理 $[kG]^*$-模.

(2) 循环子模 $[kG]^*m$ 总是有限维的,且对任意的 $0\neq m\in M, l(m)\geqslant 1$.

(3) 对任意的 $0\neq m\in M$,有 $1\leqslant l(m)<\infty$.

(4) $\forall\ m\in M$,存在 $g_1,g_2,\cdots,g_n\in G$ 使得 $m=p_{g_1}m+p_{g_2}m+\cdots+p_{g_n}m$.

证明 (1)⇒(2) 由文[1]知 $[kG]^*m$ 是有限维的. 现在设 $0\neq m\in M, \rho(m)=\sum_{i=1}^{n}m_i\otimes g_i$, $m_i\in M, g_i\in G$. 由于 ρ 是单射,可设 $m_1\neq 0$,则 $p_{g_1}m=m_1\neq 0$,故 $l(m)\geqslant 1$.

(2)⇒(3) 任取 $0\neq m\in M$,由(2) $l(m)\geqslant 1$ 且 $[kG]^*m$ 有限维. 为了证明 $l(m)<\infty$,仅需证对于 $G(m)$ 的任一有限子集 $\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$, $p_{g_1}m, p_{g_2}m,\cdots,p_{g_n}m$ 必定线性无关. 事实上,如果 $\sum_{i=1}^{n}a_ip_{g_i}m=0, a_k\in k$,则 $p_{g_j}(\sum_{i=1}^{n}a_ip_{g_i}m)=\sum_{i=1}^{n}a_i(p_{g_j}p_{g_i})m=a_j(p_{g_j}m)=0$. 但是 $p_{g_j}m\neq 0$,所以 $a_j=0, j=1,2,\cdots,n$. 故 $p_{g_1}m, p_{g_2}m,\cdots,p_{g_n}m$ 线性无关.

(3)⇒(4) $\forall\ m\in M$. 若 $m=0$,则 $\forall\ g\in G, p_gm=m$. 若 $m\neq 0$,则 $1\leqslant l(m)<\infty$,设 $G(m)=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$,下面证明 $m=p_{g_1}m+p_{g_2}m+\cdots+p_{g_n}m$.

令 $x=m-\sum_{i=1}^{n}p_{g_i}m$,则 $\forall\ g_j\in G(m)$ 有 $p_{g_j}x=p_{g_j}m-\sum_{i=1}^{n}(p_{g_j}p_{g_i})m=p_{g_j}m-p_{g_j}m=0$. 当 $g\in G\backslash G(m)$ 时, $p_gx=p_gm-\sum_{i=1}^{n}(p_gp_{g_i})m=0-0=0$. 故 $l(x)=0$,由(3)知 $x=0$,亦即 $m=\sum_{i=1}^{n}p_{g_i}m$.

(4)⇒(1) $\forall\ m\in M$,由(4)存在 $g_1,g_2,\cdots,g_n\in G$ 使得 $m=\sum_{i=1}^{n}p_{g_i}m$. 于是 $\forall\ h^*\in[kG]^*$, $\rho(m)(h^*)=h^*m=\sum_{i=1}^{n}(h^*p_{g_i})m=\sum_{i=1}^{n}\langle h^*,g_i\rangle p_{g_i}m=\lambda(\sum_{i=1}^{n}p_{g_i}m\otimes g_i)(h^*)$,故 $\rho(m)=\lambda(\sum_{i=1}^{n}p_{g_i}m\otimes g_i)\in\lambda(M\otimes kG)$, M 是有理 $[kG]^*$-模.

推论 6 若 M 是有理 $[kG]^*$-模,则 $M=\bigoplus_{g\in G}p_gM$,而且 $p_gM=\{m\in M\mid\rho(m)=m\otimes g\}$,其中 $M\otimes kG=\lambda(M\otimes kG)\subseteq \mathrm{Hom}([kG]^*,M)$. 特别地, $A=\bigoplus_{g\in G}(p_g\rightharpoonup A)$,且 $p_g\rightharpoonup A=\{a\in A\mid\varphi(a)=a\otimes g\}$.

证明 由定理 5, $M=\sum_{g\in G}p_gM$. 由引理 1 前面的叙述, M 是右 kG-余模,结构映射为:

$$\rho: M\to M\otimes kG=\lambda(M\otimes kG)\subseteq \mathrm{Hom}([kG]^*,M).$$

命 $M'_g=\{m\in M\mid\rho(m)=m\otimes g\}$,则 $M'_g\subseteq M_g=\{m\in M\mid\rho(m)\in M\otimes g\}$. 由定理 2, $M=\bigoplus_{g\in G}M_g$. 对任意的 $m\in M, h^*\in[kG]^*$,有 $\rho(p_gm)(h^*)=h^*(p_gm)=(h^*p_g)m=\langle h^*,g\rangle p_gm$,所以 $\rho(p_gm)=p_gm\otimes g$. 于是 $p_gM\subseteq M'_g\subseteq M_g$,由定理 5 知 $M=\sum_{g\in G}p_gM$,故 $p_gM=M_g$ 且 $M=\bigoplus_{g\in G}p_gM$.

引理 7 设 M,N 是左 $A\#[kG]^*$-模,且作为 $[kG]^*$-模是有理模, $f:M\to N$ 是 A-模同态,定义 $\bar f: M\to N, \bar f(m)=\sum_{g\in G}p_gf(p_gm), m\in M$,则 $\bar f$ 是 $A\#[kG]^*$-模同态.

证明 注意, $\forall\ m\in M$,由定理 5 仅有有限多个 p_gm 非零,故 $\bar f$ 的定义及记号有意义. 现在 $\forall\ h^*\in[kG]^*, m\in M$,有 $\bar f(h^*\cdot m)=\sum_{g\in G}p_gf((p_gh^*)m)=\sum_{g\in G}\langle h^*,g\rangle p_gf(p_gm)=\sum_{g\in G}(h^*p_g)f(p_gm)$

$=h^*\bar{f}(m)$，所以 $\bar{f}$ 是$[kG]^*$-模同态.

其次，$\forall\ a\in A, m\in M$，由定理 5，$a=\sum_{g\in G}(p_g\rightharpoonup a)$. 再由推论 6 知 $\varphi(p_g\rightharpoonup a)\otimes g$ 且 $\varphi(a)=\sum_{g\in G}(p_g\rightharpoonup a)\otimes g$. 故 $\bar{f}(am)=\sum_{g\in G}p_g f(p_g(a\cdot m))=\sum_{g,h\in G}p_g f((p_h\rightharpoonup a)(p_{h^{-1}g}m))=\sum_{g,h\in G}(p_h\rightharpoonup a)\cdot f(p_{h^{-1}g}\cdot m)=\sum_{h\in G}(p_h\rightharpoonup a)\bar{f}(m)=a\bar{f}(m)$. 所以 $\bar{f}$ 也是 A-同态. 从而 $\bar{f}$ 是 $A\#[kG]^*$-模同态.

定理 8 设 M 是左 $A\#[kG]^*$-模且作为$[kG]^*$-模是有理模，N 是 M 的 $A\#[kG]^*$-子模. 则 N 是 M 的 A-模直和项，当且仅当 N 是 M 的 $A\#[kG]^*$-模直和项.

证明 若 N 是 M 的 $A\#[kG]^*$-模直和项，显然 N 是 M 的 A-模直和项. 反之，由文[1]知 N 也是有理$[kG]^*$-模，且存在 A-模投射 $f: M\to N$. 由引理 7，$\bar{f}: M\to N$ 是 $A\#[kG]^*$-模同态. $\forall\ m\in N$，有 $p_g m\in N$ 且 $m=\sum_{g\in G}p_g m$，所以 $\bar{f}(m)=\sum_{g\in G}p_g f(p_g m)=\sum_{g\in G}p_g(p_g m)=\sum_{g\in G}p_g m=m$. 这说明 $\bar{f}$ 是 M 到 N 上的 $A\#[kG]^*$-模投射，故 N 是 M 的 $A\#[kG]^*$-模直和项.

推论 9 设 M 是左 $A\#[kG]^*$-模且作为$[kG]^*$-模是有理模. 如果 M 是完全可约 A-模，则 M 是完全可约 $A\#[kG]^*$-模.

注 当 G 是有限群时，每个$[kG]^*$-模是有理模，这时定理 8 就是文[2]的定理 3. 这时我们还有

推论 10 设 G 是有限群，如果 A 是半单代数，则$[A\#kG]^*$也是半单代数. 证明略.

参 考 文 献

[1] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, New York, 1969.

[2] M. Cohen, S. Montgomery, *Group Graded Rings, Smash Products, and Group Actions*, Trans. Amer. Math. Soc., 282, 237—258(1984).

[3] M. Beattie, *Strongle Inner Actions, Coactions and Duality Theorems*, Tsukuba J. Math., 16(1992), 279—293.

H^*-Rational Modules and Right Smash Products

Chen Huixiang
(Yangzhou Univ. Teachers' College)

Abstract

We discuss the rational modules over the dual algebra H^* of a Hopf algebra H. We characterize some specific properties of the class of modules and thereby we give the conditions for a module M over the right smash product $A\#_H^R[KG]^*$ to be completely reducible.

Keywords rational mudule, Smasn products.