第15卷第3期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 3
1995年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1995

GAOR 迭代法和 Jacobi 迭代法的敛散关系*

陈恒新
(华侨大学数学系，泉州 362011)

摘　要　本文将文[1]中 AOR 法和 Jacobi 法同时敛散的结论推广到 GAOR 法. 证明了当 Jacobi 矩阵 B 非负时，解线性方程组 $Ax=b$（A 为不可约矩阵）的 GAOR 法（$0\leqslant r_i<\omega_i\leqslant 1$，$i=1,2,\cdots,n$）和 Jacobi 法同时敛散，给出了其谱半径 $\rho(L_{R,\Omega})$ 和 $\rho(B)$ 之间的关系.

关键词　GAOR 迭代法，Jacobi 迭代法，收敛，发散.
分类号　AMS(1991) 65F10/CCL O241.6

§1　GAOR 迭代法

熟知，GAOR 迭代法即为广义的 AOR 迭代法. 方法叙述如下：

对于线性代数方程组

$$Ax=b, \tag{1}$$

设 $A=D-E-F$ 是 $n\times n$ 实矩阵，其中 D 是非奇异对角阵，E 是严格下三角阵，F 是严格上三角阵.

记 $L=D^{-1}E$，$U=D^{-1}F$，对角矩阵

$$R=\begin{bmatrix} r_1 & & & \\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_n \end{bmatrix},\quad \Omega=\begin{bmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n \end{bmatrix},$$

其中 $0\leqslant r_i\leqslant\omega_i$，且 $\omega_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$.

则矩阵 A 之 Jacobi 迭代矩阵为 $B=D^{-1}E+D^{-1}F=L+U$.

求解方程组(1)之 GAOR 迭代法为

$$x^{(m+1)}=L_{R,\Omega}x^{(m)}+(D-RE)^{-1}\Omega b,\ m=0,1,2,\cdots, \tag{2}$$

其中 GAOR 法迭代矩阵为：

$$L_{R,\Omega}=(D-RE)^{-1}[(I-\Omega)D+(\Omega-R)E+\Omega F]. \tag{3}$$

因 $D^{-1}RE=RD^{-1}E=RL$，$D^{-1}(I-\Omega)D=I-\Omega$，$D^{-1}(\Omega-R)E=(\Omega-R)D^{-1}E=(\Omega-R)L$，$D^{-1}\Omega F=\Omega D^{-1}F=\Omega L$. 于是式(3)可表示为

$$L_{R,\Omega}=(I-RL)^{-1}[(I-\Omega)+(\Omega-R)L+\Omega U], \tag{4}$$

* 1992年6月27日收到. 93年6月6日收到修改稿. 福建省自然科学基金资助.

若取 $r_i\equiv r_i,\omega_i=\omega,i=1,2,\cdots,n$,则 $R=rI,\Omega=\omega I$. 于是 GAOR 法迭代阵(4)便成为文[1]中的 AOR 法迭代阵 $L_{r,\omega}=(I-rL)^{-1}[(1-\omega)I+(\omega-r)L+\omega U]$,即广义的 AOR 法变成为普通的 AOR 法了.

§2 非负矩阵的性质

定义 对于 $n\times n$ 实矩阵 G,M 及 N,如果 M 非奇异,并且有 $M^{-1}\geqslant 0$ 和 $N\geqslant 0$,则称 $G=M-N$ 为矩阵 G 的正规分裂.

由文[2]定理 3.8,定理 3.13,定理 2.1 和类似定理 2.2 的证明,可得下述引理 1－4.

引理 1 设 $n\times n$ 矩阵 $G\geqslant 0$,则 $I-G$ 非奇异且 $(I-G)^{-1}\geqslant 0$ 的充要条件是 $\rho(G)<1$.

引理 2 设 $G=M-N$ 为矩阵 G 的正规分列,并且 $G^{-1}\geqslant 0$,则 $\rho(M^{-1}N)<1$.

引理 3 若 $G\geqslant 0$ 且为不可约 $n\times n$ 矩阵,则对于 $\rho(G)$,存在 $\rho(G)=\lambda>0$ 及相应特征向量 $x>0$,使 $Gx=\lambda x$.

引理 4 设 $G=[g_{ij}]\geqslant 0$ 为 $n\times n$ 矩阵,则对任一向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T>0$,成立

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x_j\Big/x_i\leqslant\rho(G)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x_j\Big/x_i.$$

§3 $\rho(L_{R,\Omega})$ 和 $\rho(B)$ 的敛散关系

定理 设线性方程组(1)的系数矩阵 A 不可约,其 Jacobi 矩阵 $B=L+U\geqslant 0$,$L_{R,\Omega}$ 为形如式(4)的 GAOR 法迭代矩阵,则对于 $0\leqslant r_i<\omega_i\leqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$有

i) $\rho(B)>0,\ \rho(L_{R,\Omega})>\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\omega_i)$.

ii) $0<\rho(B)<1\Leftrightarrow\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\omega_i)<\rho(L_{R,\Omega})<1$.

iii) $\rho(B)=1\Leftrightarrow\rho(L_{R,\Omega})=1$.

iv) $\rho(B)>1\Leftrightarrow\rho(L_{R,\Omega})>1$.

即 GAOR 法和 Jacobi 法同时敛散.

证明 因为 GAOR 法之迭代矩阵 $L_{R,\Omega}=(I-RL)^{-1}[(I-\Omega)+(\Omega-R)L+\Omega U]$. 由于 $RL\geqslant 0$,$\rho(RL)=0$,由引理 1 知$(I-RL)^{-1}\geqslant 0$. 且有 $L_{R,\Omega}=(I+RL+(RL)^2+\cdots)[(I-\Omega)+(\Omega-R)L+\Omega U]\geqslant(I-\Omega)+(\Omega-R)L+\Omega U$.

因为 $A=D-E-F=D(I-L-U)$为不可约矩阵,从而$(I-L-U)=D^{-1}A$ 为不可约矩阵,于是 $B=L+U$ 亦为不可约矩阵. 由于 $0\leqslant r_i<\omega_i\leqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$,因此$(I-\Omega)+(\Omega-R)L+\Omega U\geqslant 0$ 且不可约. 于是可知 GAOR 法迭代矩阵 $L_{R,\Omega}\geqslant 0$ 且不可约. 由引理 3 知,对于 $\rho(L_{R,\Omega})$,存在 $\lambda=\rho(L_{R,\Omega})>0$ 和相应特征向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T>0$,使 $L_{R,\Omega}x=\lambda x$,即$(I-RL)^{-1}[(I-\Omega)+(\Omega-R)L+\Omega U]x=\lambda x$,$[(I-\Omega)+(\Omega-R)L+\Omega U]x=\lambda(I-RL)x$. 因此有

$$(\Omega-R)Lx+\lambda RLx+\Omega Ux=[\lambda I-(I-\Omega)]x,\tag{5}$$

其分量形式为:

$$(\omega_i-r_i+\lambda r_i)\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}x_j+\omega_i\sum_{j=i+1}^{n}b_{ij}x_j=(\lambda-1+\omega_i)x_i,\ i=1,2,\cdots,n.\tag{6}$$

现证 i). 因我们已推得 $B\geqslant 0$ 且不可约，由引理 3 便得 $\rho(B)>0$.

若 $\rho(L_{R,\Omega})\geqslant 1$，因 $0<\omega_i\leqslant 1$，所以 $\rho(L_{R,\Omega})\geqslant 1>(1-\omega_i)$，$i=1,2,\cdots,n$. 从而

$$\rho(L_{R,\Omega})>\max_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\omega_i).$$

若 $\lambda=\rho(L_{R,\Omega})<1$，由式(5)知其左端非负，从而右端亦非负. 因此 $\lambda I-(I-\Omega)\geqslant 0$，即 $\lambda I\geqslant I-\Omega$，$\lambda\geqslant 1-\omega_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 则 $\lambda\geqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\omega_i)$. 若 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\omega_i)\overset{\text{记}}{=}1-\omega_k(1\leqslant k\leqslant n)$. 则由式(6)有

$$(\omega_k-r_k+\lambda r_k)\sum_{j=1}^{k-1}b_{kj}x_j+\omega_k\sum_{j=k+1}^{n}b_{kj}x_j=0. \tag{7}$$

因 $\omega_k-r_k+\lambda r_k>0$，$\omega_k>0$ 且 $x_j>0$，$b_{kj}\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)$. 这样由上面式(7)知 $b_{kj}=0$，$j=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots n$. 与矩阵 $I-L-U=D^{-1}A$ 不可约矛盾. 所以 $\rho(L_{R,\Omega})=\lambda>\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\omega_i)$.

现证 ii). 若 $0<\rho(B)<1$，记 $M=I-RL$，$N=(I-\Omega)+(\Omega-R)L+\Omega U$，则 $L_{R,\Omega}=M^{-1}N$. 因 $M^{-1}=(I-RL)^{-1}\geqslant 0$，$N=(I-\Omega)+(\Omega-R)L+\Omega U\geqslant 0$. 由定义知 $T_{R,\Omega}=M-N$ 为正规分裂. 又

$$T_{R,\Omega}=I-RL-[I-\Omega+(\Omega-R)L+\Omega U]=\Omega(I-L-U)=\Omega(I-B),$$

$$T_{R,\Omega}^{-1}=(I-B)^{-1}\Omega^{-1}.$$

因 $\Omega^{-1}\geqslant 0$，$B\geqslant 0$，$0<\rho(B)<1$，由引理 1 知 $T_{R,\Omega}^{-1}\geqslant 0$. 这样由引理 2 可得 $\rho(L_{R,\Omega})=\rho(M^{-1}N)<1$. 又由本定理结论 i) $\rho(L_{R,\Omega})>\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\omega_i)$，所以有 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\omega_i)<\rho(L_{R,\Omega})<1$.

若 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\omega_i)<\lambda=\rho(L_{R,\Omega})<1$. 则 $1-\omega_i<\lambda<1$，$i=1,2,\cdots,n$. 因 $-r_i+\lambda r_i=(\lambda-1)r_i\leqslant 0$，所以 $0<\omega_i-r_i+\lambda r_i\leqslant\omega_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 又 $b_{ii}=0$，$i=1,2,\cdots,n$. 因此

$$(\omega_i-r_i+\lambda r_i)\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j\leqslant(\omega_i-r_i+\lambda r_i)\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}x_j+\omega_i\sum_{j=i+1}^{n}b_{ij}x_j,\ i=1,2,\cdots,n.$$

于是由式(6)有

$$(\omega_i-r_i+\lambda r_i)\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j\leqslant(\lambda-1+\omega_i)x_i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j\Big/x_i\leqslant\frac{\lambda-1+\omega_i}{\omega_i-r_i+\lambda r_i},\ i=1,2,\cdots,n. \tag{8}$$

因 $0\leqslant 1-\omega_i<\lambda<1$，$1-r_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，所以有

$$\lambda(1-r_i)<1-r_i,\ \lambda-1<-r_i+\lambda r_i,$$

$$0<\lambda-1+\omega_i<\omega_i-r_i+\lambda r_i,\quad 0<\frac{\lambda-1+\omega_i}{\omega_i-r_i+\lambda r_i}<1,\ i=1,2,\cdots,n.$$

于是由式(8)有

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}x_j}{x_i}<1,\ i=1,2,\cdots,n$$

由引理 4 便得 $\rho(B)<1$，又由本定理结论 i)，所以 $0<\rho(B)<1$.

现证 iii)$\Leftarrow$. 若 $\lambda=\rho(L_{R,\Omega})=1$. 由式(5)有 $\Omega(L+U)x=\Omega x$，得 $(L+U)x=x$，即 $Bx=x$，因 $x>0$，所以有 $\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}x_j\Big/x_i=1$，$i=1,2,\cdots,n$. 由引理 4 便得 $\rho(B)=1$.

现证 iv)$\Leftarrow$. 若 $\lambda=\rho(L_{R,\Omega})=1$. 因 $-r_i+\lambda r_i=(\lambda-1)r_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$，所以 $\omega_i-r_i+\lambda r_i\geqslant\omega_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$. 又 $b_{ii}=0$，$i=1,2,\cdots,n$. 这样由式(6)有

$$(\omega_i - r_i + \lambda r_i)\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j \geqslant (\lambda - 1 + \omega_i)x_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j \Big/ x_i \geqslant \frac{\lambda - 1 + \omega_i}{\omega_i - r_i + \lambda r_i},\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{9}$$

因 $\lambda>1, 1-r_i>0, i=1,2,\cdots,n$. 所以有

$$\lambda(1 - r_i) > 1 - r_i,\ \lambda - 1 > - r_i + \lambda r_i;$$

$$\lambda - 1 + \omega_i > \omega_i - r_i + \lambda r_i > 0,\quad \frac{\lambda - 1 + \omega_i}{\omega_i - r_i + \lambda r_i} > 1,\ i = 1,2,\cdots,n$$

于是由式(9)便有 $\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j \Big/ x_i > 1, i = 1,2,\cdots,n$. 由引理 4 便得 $\rho(B)>1$.

对于 iii)⇒, 反证. 若 $\rho(B)=1$, 但 $\rho(L_{R,\Omega})\neq 1$, 则由 i) 知 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\omega_i)<\rho(L_{R,\Omega})<1$ 或 $\rho(L_{R,\Omega})>1$, 由 ii)⇐和(iv)⇐即得 $0<\rho(B)<1$ 或 $\rho(B)>1$ 与 $\rho(B)=1$ 矛盾, 所以 $\rho(L_{R,\Omega})=1$.

对 iv)⇒, 反证. 若 $\rho(B)>1$, 但 $\rho(L_{R,\Omega})\leqslant 1$, 由 ii), iii) 得 $\rho(B)\leqslant 1$, 矛盾. 所以 $\rho(L_{R,\Omega})>1$.

至此, 已证完本定理结论 i)－iv).

显然, 当 A 为 L-矩阵, 则其 Jacobi 矩阵 $B\geqslant 0$. 于是由本文定理便可得到比文[3]定理 6 之 6°更好的结果. 即

推论 若 A 为不可约 L-阵, 但非 M-阵, 则对于 $0\leqslant r_i<\omega_i\leqslant 1\,(i=1,2,\cdots,n)$, GAOR 迭代阵 $L_{R,\Omega}$ 不收敛.

而在文[3]定理 6 之 6°中, r_i 被限制为适当小的 r_i, 实际上难以确定.

参 考 文 献

[1] 陈培贤, AOR 方法的收敛性, 计算数学, 5:1(1983), 66—71.

[2] 瓦格, 矩阵迭代分析, 上海科技出版社, 1966.

[3] 胡家赣, 尺度变换和矩阵分解的收敛性, 计算数学, 5:1(1983), 72—78.

Convergence and Divergence Relation between GAOR Method and Jacobi Method

Chen Hengxin

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., Quanzhou 362011)

Abstract

GAOR method and Jacobi method for solving system of linear equations are proved to be convergent and divergent simultaneously in case Jacobi matrix B is nonnegative. The relation between the spectral radius $\rho(L_{R,\Omega})$ of GAOR iterative matrix and $\rho(B)$ is determined.

Keywords GAOR iterative method, Jacobi iterative method, convergence, divergence.