第15卷第3期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 3
1995年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1995

加速松弛迭代法的最优因子*

蒋 美 群
(苏州大学数学系，215006)

摘 要 本文定义了加速松弛迭代法的最优因子，并就具有相容次序且对角线上元素全不为零矩阵得到了最优因子的表达式，最后就本文的结论好于 G. Avdelas & A. Hadjidimos 的结果给出了实例.

关键词 加速松弛迭代法，最优因子，相容次序矩阵.
分类号 AMS(1991) 65F30/CCL O241.6

1 引 言

求解线性方程组的加速松弛迭代法，记为(AOR)，对于这一方法的最优因子问题，本文提出了新的最优因子概念，即同时考虑松弛因子和加速因子，从而保证达到迭代矩阵的最小谱半径，并对具有相容次序且对角线上元素全不为零的矩阵，讨论了该意义下的最优因子选取，给出了最优因子的表达式，最后又用实例说明本文的结果好于 G. Avdelas & A. Hadjidimos 的结论.

2 加速松弛迭代法

给定线性方程组：

$$Ax = b, \tag{2.1}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ 为非奇异的实矩阵，x 为未知的 n 维向量，b 为已知的 n 维向量.

解(2.1)采用迭代法时，分解矩阵：

$$A = D - A_L - A_U, \tag{2.2}$$

其中 D 是 A 的对角线元素组成的非奇异对角阵，A_L，A_U 分别由 A 导出的严格下、上三角阵.

用超松弛迭代法(SOR)求解时：

$$x^{(m+1)} = \mathscr{L}_\omega x^{(m)} + c, \tag{2.3}$$

其中 $\mathscr{L}_\omega = (I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I+\omega U]$，$c=(I-\omega L)^{-1}b$，$L=D^{-1}A_L$，$U=D^{-1}A_U$，$\omega$—松弛因子，$\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

用加速松弛迭代法求解时：

---

* 1991年9月12日收到.

$$x^{(m+1)} = \mathscr{L}_{\omega,r} x^{(m)} + rc, \tag{2.4}$$

式中 $\mathscr{L}_{\omega,r} = (I-\omega L)^{-1}[(1-r)I+(r-\omega)L+rU]$，$r$—加速因子，$r\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

当 $\omega=r$ 时，有

$$\mathscr{L}_{\omega,\omega} = \mathscr{L}_{\omega}. \tag{2.5}$$

取 $\theta=\frac{r}{\omega}$ 级容易推得关系式：

$$\mathscr{L}_{\omega,r} = \theta\mathscr{L}_{\omega} + (1-\theta)I. \tag{2.6}$$

因而加速松弛法可看作是超松弛迭代法的外推，记为(ESOR)[2]，由于 r 是 ω,θ 的函数，并且 $f(z)=\theta z+(1-\theta)$ 为复平面上的 Möbius 映照. 这样，我们将推导 $\mathscr{L}_{\omega,r}$ 的最优因子 ω_{opt}, r_{opt} 归为对松弛因子 ω 和一次 Möbius 映照中的 θ 因子的最优确定，使 $\widetilde{\mathscr{L}}_{\omega,\theta}$ 达到最小谱半径.

3 最优的定义和最优因子

由第 2 节的(2.6)式和 $\theta=\frac{r}{\omega}$，对 $\mathscr{L}_{\omega,r}$ 的最优可表为对 $\widetilde{\mathscr{L}}_{\omega,\theta}$ 的最优，因而我们给出：

定义 1 逐次(累次)最优：

$$\min_{\theta}\min_{\omega}\{|\sigma(\widetilde{\mathscr{L}}_{\omega,\theta})|\}, \tag{3.1}$$

$$\min_{\omega}\min_{\theta}\{|\sigma(\widetilde{\mathscr{L}}_{\omega,\theta})|\}, \tag{3.2}$$

同时最优：

$$\min_{\omega,\theta}\{|\sigma(\widetilde{\mathscr{L}}_{\omega,\theta})|\}. \tag{3.3}$$

由定义可知，同时最优一定包含了逐次最优，下面就矩阵具有相容次序且对角线上元素全不为零的条件下，用几何方法确定在(3.3)式定义的意义下最优 ω,θ 因子，并给出表达式.

先给出记号和条件：

B 表示矩阵 A 所对应的 Jacobi 矩阵，$\sigma(B)$表示 B 的特征值.

记 $\underset{\sim}{u}=\min|\sigma(B)|$，$\tilde{u}=\max|\sigma(B)|$，设 B 的特征值 u_i 均为实数且 $u_i<1$.

记$\{\lambda_i\}$为$\{\sigma(\mathscr{L}_\omega)\}$，参照[1]，用记号 λ_M^-, λ_M^+ 表示 $\tilde{u}$ 对应的特征值，用 λ_m^-, λ_m^+ 表示 $\underset{\sim}{u}$ 对应的特征值，有 u_i 与 λ_i 之间的关系：$(\lambda+\omega-1)^2=\omega^2u^2\lambda$. 可解得：$\lambda_{i1}=\left[\frac{\omega|u_i|+(\omega^2u_i^2-4(\omega-1))^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^2$ 与 $\lambda_{i2}=\left[\frac{\omega|u_i|-(\omega^2u_i^2-4(\omega-1))^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^2$，当 $\omega^2u_i^2-4(\omega-1)<0$ 时，$\lambda_{i1},\lambda_{i2}$ 是一对共轭复根，且 $|\lambda_{i1}|=|\lambda_{i2}=|\omega-1|$；当 $\omega^2u_i^2-4(\omega-1)\geqslant 0$ 时，$\lambda_{i1},\lambda_{i2}$ 是正实根，且 $\lambda_1\lambda_2=(\omega-1)^2$，因而对于 $\omega\in(0,2)$时，$\sigma(\mathscr{L}_\omega)$ 的分布可如图 1 所示：即 $\sigma(\mathscr{L}_\omega)$分布于$\overline{\lambda_M^-\lambda_M^+}$与$\widehat{\lambda_m^+\lambda_m^-}$上.

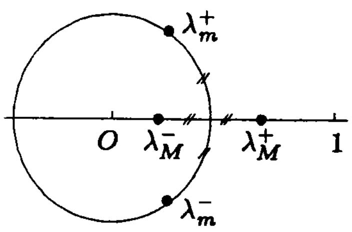

图 1

对于$\{\lambda_i\}$中的复数是成共轭对出现，因而在下面的作图中，我们给出实轴的上半平面所对应的图形.

在图 1 中各点(坐标)所对应的数值为：

$$
\begin{cases}
\lambda_M^+ = \frac{1}{2}[\omega^2\bar{u}^2 - 2(\omega-1) + \omega\bar{u}(\omega^2\bar{u}^2 - 4(\omega-1))^{\frac{1}{2}}], \\
\lambda_M^- = \frac{1}{2}[\omega^2\bar{u}^2 - 2(\omega-1) - \omega\bar{u}(\omega^2\bar{u}^2 - 4(\omega-1))^{\frac{1}{2}}], \\
x_m = \mathrm{Re}(\lambda_m^+) = \frac{1}{2}[\omega^2\underset{\sim}{u}^2 - 2(\omega-1)], \\
y_m = \mathrm{Im}(\lambda_m^-) = \frac{1}{2}\omega\underset{\sim}{u}[4(\omega-1) - \omega^2\underset{\sim}{u}^2]^{\frac{1}{2}}
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

详细计算该组数据可参阅[1].

下面我们首先给出 ω 的最优范围：

引理1 对于具有相容次序的矩阵，设对角线元素全不为零，所对应的线性方程组(2.1)用加速松弛迭代法(AOR)求解时，ω 因子在(3.3)式下的最优范围是：$\left[\frac{2}{1+\sqrt{1-\underset{\sim}{u}^2}}, \frac{2}{1+\sqrt{1-\bar{u}^2}}\right]$.

证明 取 $y_m=0$，则 $\sigma(\mathscr{L}_\omega)$ 在实轴上，这时的最优仅需对 θ 因子选择，因而故 $y_m \geqslant 0$，能同时对 ω,θ 因子最优，即 $\omega \geqslant \frac{2}{1+\sqrt{1-\underset{\sim}{u}^2}}$.

又因 $\min\limits_{\theta\in R\setminus\{0\}} \min\limits_{\omega\in(0,2)} \{|\sigma(\widetilde{\mathscr{L}}_{\omega,\theta})|\}$ 有结论[4].

$$
\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\bar{u}^2}}, \quad \theta_{opt} = \frac{1-\underset{\sim}{u}^2 + (1-\bar{u}^2 + (1-\bar{u}^2)^{\frac{1}{2}}}{2(1-\underset{\sim}{u}^2)}.
$$

由(3.1)—(3.3)的最优定义可知，ω 的取值为：$\left[\frac{2}{1+\sqrt{1-\underset{\sim}{u}^2}}, \frac{2}{1+\sqrt{1-\bar{u}^2}}\right]$.

下面我们在 ω 属于 $\left[\frac{2}{1+\sqrt{1-\underset{\sim}{u}^2}}, \frac{2}{1+\sqrt{1-\bar{u}^2}}\right]$ 上对 ω,θ 在(3.3)式意义下讨论最优，把 ω 看作变量，$\omega\in\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\underset{\sim}{u}^2}}, \frac{2}{1+\sqrt{1-\bar{u}^2}}\right)$ 时有：

$$
\begin{cases}
(\omega^2\bar{u}^2 - 4(\omega-1)) > 0, \\
(\omega^2\underset{\sim}{u}^2 - 4(\omega-1)) < 0.
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

对于 Möbius 映射 $f(z)=\theta z+(1-\theta)$，将 $\lambda_m^+, \lambda_M^-, \lambda_M^+$ 映为如图2中 a,b,c 三点，并使 a,b,c 三点落在以原点为中心的同一圆周上，我们取确定使 b,c 到原点等距的映照应为：

$$
\begin{cases}
f(z) = \theta z + (1-\theta), \\
\theta = \frac{z}{z-(\lambda_M^- + \lambda_M^+)}.
\end{cases}
\tag{3.6}
$$

接着我们讨论使 $\rho(\widetilde{\mathscr{L}}_{\omega,\theta})$ 完全由 a,b,c 三点确定的条件，如图3所示，要求分布于 $\widehat{\lambda_m^+ d}$ 圆弧上的点映在 $\widehat{ad'}$ 上，并且完全落在以原点为中心，由 a,b,c 三点所确定的圆内，这就要求 $|\theta|>1$，可以

证明，由(3.6)式给出的 θ 表达式，用 $\omega\in(\frac{2}{1+\sqrt{1-\underset{\sim}{u}^2}},\frac{2}{1+\sqrt{1-\tilde{u}^2}})$ 代入时，满足 $|\theta|>1$ 的条件，即把(3.4)式代入再比较(3.5)式就得. 把上述讨论表为：

引理 2 由(3.6)式给出的 Möbius 映照，在 $\omega\in(\frac{2}{1+\sqrt{1-\underset{\sim}{u}^2}},\frac{2}{1+\sqrt{1-\tilde{u}^2}})$ 时，$\rho(\widetilde{\mathscr{L}}_{\omega,\theta})$ 完全由 a,b,c 三点到原点距离所确定.

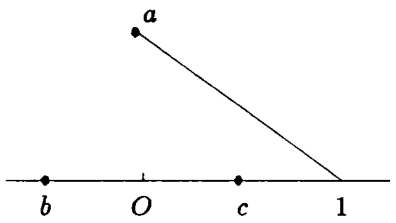

图 2

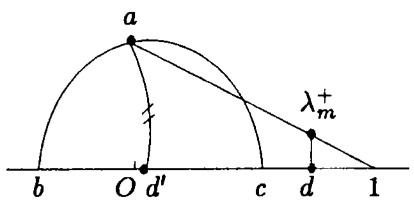

图 3

因而选取 ω,θ 使 a,b,c 三点都在原点为圆心的圆周是(3.3)意义下的最优.

分别用 ρ：s_1,s_2 表示 a,b,c 三点到原点的距离为：

$$\begin{cases}\rho=[(1-\theta+\theta x_m)^2+\theta^2y_m^2]^{\frac{1}{2}},\\ s_1=|1-(1-\lambda_M^+)\theta|,\\ s_2=|(1-\lambda_M^-)\theta-1|.\end{cases}\tag{3.7}$$

分别把(3.6)式，(3.4)式代入上式并化简可得：

$$\begin{cases}\rho=\dfrac{[\omega^2(\tilde{u}^4-2\underset{\sim}{u}^2\tilde{u}^2)+4\underset{\sim}{u}^2(\omega-1)]^{\frac{1}{2}}}{2-\omega\tilde{u}^2},\\ s_1=|1-\dfrac{2}{2\omega-\omega^2\tilde{u}^2}[\omega-\dfrac{1}{2}\omega^2\tilde{u}^2-\dfrac{1}{2}\omega\tilde{u}(\omega^2\tilde{u}^2-4(\omega-1))^{\frac{1}{2}}]|,\\ s_2=|1-\dfrac{2}{2\omega-\omega^2\tilde{u}^2}[\omega-\dfrac{1}{2}\omega^2\tilde{u}^2+\dfrac{1}{2}\omega\tilde{u}(\omega^2\tilde{u}^2-4(\omega-1))^{\frac{1}{2}}]|.\end{cases}\tag{3.8}$$

取 $s_1=s_2$：有

$$s_1=s_2=\frac{\tilde{u}[\omega^2\tilde{u}^2-4(\omega-1)]^{\frac{1}{2}}}{2-\omega\tilde{u}^2}.\tag{3.9}$$

要使 ω 达到最优，必须有 $\rho=s_1=s_2$，联列(3.9)和 ρ 的表达式化简得：

$$\underset{\sim}{u}\tilde{u}^2\omega^2-2(\underset{\sim}{u}^2+\tilde{u}^2)\omega+2(\underset{\sim}{u}^2+\tilde{u}^2)=0,\tag{3.10}$$

从中求解 ω 为：

$$\omega_{1,2}=\frac{(\underset{\sim}{u}^2+\tilde{u}^2)\pm\sqrt{(\underset{\sim}{u}^2+\tilde{u}^2)(\underset{\sim}{u}^2+\tilde{u}^2-2\underset{\sim}{u}^2\tilde{u}^2)}}{\underset{\sim}{u}^2\tilde{u}^2}\tag{3.11}$$

由 $\tilde{u}<1$ 可知：

$$2\underset{\sim}{u}^2\tilde{u}^2<2\underset{\sim}{u}\tilde{u}<\underset{\sim}{u}^2+\tilde{u}^2,\tag{3.12}$$

即

$$\frac{\underset{\sim}{u}^2+\tilde{u}^2}{\underset{\sim}{u}^2\tilde{u}^2}>2. \tag{3.12}$$

因而 ω 应取为：

$$\omega_{opt}=\frac{(\underset{\sim}{u}^2+\tilde{u}^2)-\sqrt{(\underset{\sim}{u}^2+\tilde{u}^2)(\underset{\sim}{u}^2+\tilde{u}^2-2\underset{\sim}{u}^2\tilde{u}^2)}}{\underset{\sim}{u}^2\tilde{u}^2} \tag{3.13}$$

把 ω_{opt} 代入(3.6)式中的 θ，

$$\theta_{opt}=\frac{2}{2\omega_{opt}-\omega_{opt}^2\tilde{u}^2}. \tag{3.14}$$

上述结论写作定理形式：

定理 3 设矩阵 A 具有相容次序且对角线上元素全不为零，由此给出的线性方程组(2.1)采用加速松弛迭代法(AOR)(2.4)式求解时，则 ω 在 $\left[\frac{2}{1+\sqrt{1-\underset{\sim}{u}^2}},\frac{2}{1+\sqrt{1-\tilde{u}^2}}\right]$ 中取最优由(3.13)式确定，θ 的最优由(3.14)式确定.

同样上面的方法也可确定 ω, r 的最优.

推论 4 若把 ω,θ 的最优因子归到 r 的最优时，只需取 $r_{opt}=\omega_{opt}\theta_{opt}$ 即可.

4 数值例子

矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{71}{10} & \frac{113}{10}\\ \frac{16}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0\\ 2 & \frac{1}{5} & 0 & 1\end{pmatrix},$$

对应的 Jacobi 矩阵的特征值为：$-\frac{2\sqrt{6}}{5}<\frac{-\sqrt{23}}{5}<\frac{\sqrt{23}}{5}<\frac{2\sqrt{6}}{5}$. 于是 $\underset{\sim}{u}=\frac{\sqrt{23}}{5}, \tilde{u}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

SOR 方法：$\begin{cases}\omega_{opt}=\frac{5}{3}\\ ,\rho(\mathscr{L}_{\omega_{opt}})=\frac{2}{3}.\end{cases}$

用(3.1)式意义下的逐次最优为：

$$\begin{cases} \omega_{opt} = \frac{5}{3}, \\ r_{opt} = -\frac{5}{4}, \end{cases}$$

$$\rho(\mathscr{L}_{\omega_{opt}, r_{opt}}) = \frac{\sqrt{46}}{12} \approx 0.5652.$$

采用本文所给出的方法最优为：

$$\begin{cases} \omega_{opt} \approx 1.6054 \\ \theta_{opt} \approx -1.5508 \end{cases}$$

$$\rho(\widetilde{\mathscr{L}}_{\omega_{opt}, \theta_{opt}}) \approx 0.5048.$$

例子说明，采用全面最优可得到最小的迭代谱半径.

参 考 文 献

[1] 曹志浩等，矩阵计算和方程求根，高等教育出版社，(1984)第二版.

[2] A. Hadjidimos, *Accelerated overrelaxation method*, Math. Comp., 32(1978), 149—157.

[3] A. Hadjidimos, *The optimal solution of the extrapolation problem of a first order scheme*, Intercn J Comput Math., 13(1983), 153—168.

[4] G. Avdelas and A. Hadjidimos, *Optimum accelerated overrelaxation method in a special case*, Math Comp., 136 (1981), 183—187.

The Optimal Factors of the AOR Method

Jiang Meiqun

(Suzhou Univ., Suzhou 215006)

Abstract

In this paper, a new concept of optimal factors of the accelerated overrelaxation iterative method for linear systems is defined. The formula of the optimal factors is obtained for the consistently ordered matrices whose diagonal elements are nonzero. Example is given to show that the results are general than that of G.Avdelas & A.Hadjidimos.

Keywords accelerated overrelation (AOR) iterative method, optimal factor, consistently ordered matrix.