第 15 卷第 3 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 15 No. 3
1995 年 8 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1995

一类涉及两个单形的不等式及应用*

苏 化 明
(合肥工业大学数力系，合肥 230039)

摘　要　本文给出了一类涉及两个单形的三角不等式，作为其应用，可以导出文[1]的主要结果，特别地可以证明文[5]提出的一个猜想.

关键词　顶点角，内顶角，单形，不等式.
分类号　AMS(1991) 51K05/CCL O184

§1　引　言

G. Tsintsifas 于 1987 年建立了如下涉及两个单形的不等式(可见[1],)：

定理 1.1　设 $\mathscr{A}: A_0A_1\cdots A_n$ 与 $\mathscr{A}': A'_0A'_1\cdots A'_n$ 为 n 维欧氏空间 E^n 中的两个单形，它们的体积分别为 V 和 V'. 若 P 为单形 $\mathscr{A}$ 内的任意一点，记 $PA_i=x_i$，又单形 $\mathscr{A}'$ 的顶点 A'_i 所对侧面的 $n-1$ 维体积记为 $V'_i(i=0,1,\cdots,n)$，则有

$$\left(\sum_{i=0}^{n}x_iV'_i\right)^n \geqslant n^{2n}VV'^{(n-1)}. \tag{1.1}$$

本文在这里将首先引入单形内顶角的概念，然后结合单形顶点角的定义([2],[3])，建立一类涉及两个单形的三角不等式. 作为其应用，我们可以导出定理 1.1，特别地可以证明作者于 1985 年提出的关于垂足单形体积不等式的一个猜想[4].

§2　基本概念与引理

定义 2.1[2]　设 $\mathscr{A}: A_0A_1\cdots A_n$ 为 E^n 中的 n 维单形，$\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n$ 分别为 $\mathscr{A}$ 的 $n+1$ 个界面上的单位法向量，令

$$D_i = G(\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_{i-1},\mathbf{e}_{i+1},\cdots,\mathbf{e}_n), \tag{2.1}$$

这里 $G(\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_{i-1},\mathbf{e}_{i+1},\cdots,\mathbf{e}_n)$ 为向量 $\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_{i-1},\mathbf{e}_{i+1},\cdots,\mathbf{e}_n$ 的 Gram 行列式，则称 $\alpha_i=\arcsin\sqrt{D_i}$ 为单形 $\mathscr{A}$ 的第 i 个界面所对应的顶点角($i=0,1,\cdots,n$).

定义 2.2　设 P 为 E^n 中的 n 维单形 $\mathscr{A}: A_0A_1\cdots A_n$ 内部任意一点，与 $\overrightarrow{PA_i}$ 方向一致的单位向量记为 ε_i，令

$$H_i = G(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{-1},\varepsilon_{i+1},\cdots,\varepsilon_n) \tag{2.2}$$

* 1992 年 3 月 2 日收到.

这里 $G(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{i-1},\varepsilon_{i+1},\cdots,\varepsilon_n)$为向量 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{i-1},\varepsilon_{i+1},\cdots,\varepsilon_n$ 的 Gram 行列式,则称 $\beta_i=\arcsin\sqrt{\Pi_i}$为单形 $\mathscr{A}$ 以 P 为顶点且对应于 $A_i(i=0,1,\cdots,n)$的内顶角.

关于单形的顶点角和内顶角,有如下的

引理 2.1 设 $\mathscr{A}:A_0A_1\cdots A_n$ 为 n 维欧氏空间 $E^n(n\geqslant 2)$中的单形,P 为 $\mathscr{A}$ 内任意一点.若单形 $\mathscr{A}$ 的顶点角为 α_i,以 P 为顶点且对应于 A_i 的内顶角为 β_i,又 μ_i 为正数$(i=0,1,\cdots,n)$,则有

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\mu_j\Big)\sin^2\alpha_i\leqslant\frac{1}{n^n}\Big(\sum_{i=0}^{n}\mu_i\Big)^n, \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\mu_j\Big)\sin^2\beta_i\leqslant\frac{1}{n^n}\Big(\sum_{i=0}^{n}\mu_i\Big)^n. \tag{2.4}$$

不等式(2.3)中等号成立的充分必要条件为下列各式均成立:

$$\frac{\mu_i}{\sum\limits_{l=0}^{n}\mu_l}=\frac{\cos\theta_{jk}}{n(\cos\theta_{jk}-\cos\theta_{ij}\cos\theta_{ik})}\quad\begin{pmatrix}i,j,k=0,1,\cdots,n\\ i\neq j,i\neq k,j\neq k\end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

其中 θ_{ij} 为向量 $\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j$ 之间的夹角.不等式(2.4)中等号成立的充分必要条件为下列各式均成立:

$$\frac{\mu_i}{\sum\limits_{l=0}^{n}\mu_l}=\frac{\cos\varphi_{jk}}{n(\cos\varphi_{jk}-\cos\varphi_{ij}\cos\varphi_{ik})}\quad\begin{pmatrix}i,j,k=0,1,\cdots,n\\ i\neq j,i\neq k,j\neq k\end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

其中 φ_{ij} 为向量 $\varepsilon_i,\varepsilon_j$ 之间的夹角.

证明 由于证法类似,仅证不等式(2.4)(不等式(2.3)的证明亦可见[5]).

若$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$表示向量 $\varepsilon_i,\varepsilon_j$ 的内积,则向量$\sqrt{\mu_0}\varepsilon_0,\sqrt{\mu_1}\varepsilon_1,\cdots,\sqrt{\mu_n}\varepsilon_n$ 的 Gram 矩阵

$$M=((\sqrt{\mu_i}\varepsilon_i,\sqrt{\mu_j}\varepsilon_j))$$

为 $n+1$ 阶实对称半正定矩阵,且 Rank $M=n$.

M 的特征方程为

$$\det(M-\lambda I)=0\quad(I\text{ 为 }n+1\text{ 阶单位矩阵}).$$

展开后得

$$\lambda^{n+1}-c_1\lambda^n+c_2\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^nc_n\lambda+(-1)^{n+1}c_{n+1}=0. \tag{2.7}$$

因为 M 为半正定矩阵,所以 $c_{n+1}=0$,故(2.7)式即为

$$\lambda^n-c_1\lambda^{n-1}+c_2\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^nc_n=0. \tag{2.8}$$

再由 Rank $M=n$,所以方程(2.8)的 n 个根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全为正数.

由单形内顶角的定义 2.2 及矩阵特征方程的系数与矩阵各阶主子式的关系,有

$$c_1=\sum_{i=0}^{n}\mu_i,\quad c_n=\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\mu_j\Big)\sin^2\beta_i.$$

另一方面,由 Veita 定理知

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i=c_1,\quad\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=c_n.$$

利用算术—几何平均不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\geqslant\Big(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\Big)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.9}$$

所以

$$\sum_{i=0}^{n}(\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\mu_j)\sin^2\beta_i\leqslant\frac{1}{n^n}(\sum_{i=0}^{n}\mu_i)^n. \tag{2.4}$$

由算术—几何平均不等式等号成立条件知(2.4)中等号成立的充分必要条件为 $n+1$ 阶实对称矩阵 M 有 n 重特征根 $\lambda_0=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n}\mu_l$，而这一条件等价于 $\mathrm{Rank}(M-\lambda_0 I)=1$，或矩阵 $M-\lambda_0 I$ 的任意两行元素对应成比例，由于 M 又可写为

$$M=\begin{pmatrix}\mu_0 & & & \sqrt{\mu_i\mu_j}\cos\varphi_{ij}\\ & \mu_1 & & \\ & & \ddots & \\ \sqrt{\mu_i\mu_j}\cos\varphi_{ij} & & & \mu_n\end{pmatrix},$$

故当且仅当

$$\frac{\mu_i-\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n}\mu_l}{\sqrt{\mu_j\mu_i}\cos\varphi_{ji}}=\frac{\sqrt{\mu_i\mu_j}\cos\varphi_{ij}}{\mu_j-\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n}\mu_l}=\frac{\sqrt{\mu_i\mu_k}\cos\varphi_{ik}}{\sqrt{\mu_j\mu_k}\cos\varphi_{jk}}, \tag{2.10}$$

亦即

$$\frac{\mu_i}{\sum_{l=0}^{n}\mu_l}=\frac{\cos\varphi_{jk}}{n(\cos\varphi_{jk}-\cos\varphi_{ij}\cos\varphi_{ik})}\begin{pmatrix}i,j,k=0,1,\cdots,n\\ i\neq j,i\neq k,j\neq k\end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

均成立时，(2.4)式中等号成立.

§3 主要结论及应用

利用引理 2.1，我们可得到

定理 3.1 设 $\mathscr{A}:A_0A_1\cdots A_n$ 与 $\mathscr{A}':A_0'A_1'\cdots A_n'$ 为 $E^n(n\geqslant 2)$ 中的两个单形，P 与 P' 分别为 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}'$ 内部任意一点. 若 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}'$ 的顶点角分别为 α_i, α_i'，以 P,P' 为顶点且分别对应于 A_i,A_i' 的内顶角为 β_i,β_i'，又 μ_i 为正数$(i=0,1,\cdots,n)$，则有

$$\sum_{i=0}^{n}(\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\mu_j)\sin\alpha_i\sin\beta_i'\leqslant\frac{1}{n^n}(\sum_{i=0}^{n}\mu_i)^n, \tag{3.1}$$

其中等号成立的充分必要条件为下列各式均成立

$$\frac{\mu_i}{\sum_{l=0}^{n}\mu_l}=\frac{\cos\theta_{jk}}{n(\cos\theta_{jk}-\cos\theta_{ij}\cos\theta_{ik})}$$

$$=\frac{\cos\varphi_{jk}'}{n(\cos\varphi_{jk}'-\cos\varphi_{ij}'\cos\varphi_{ik}')}\quad\begin{pmatrix}i,j,k=0,1,\cdots,n\\ i\neq j,i\neq k,j\neq k\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

且

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin\beta_0'}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1'}=\cdots=\frac{\sin\alpha_n}{\sin\beta_n'}, \tag{3.3}$$

其中 θ_{ij} 为单形 $\mathscr{A}$ 的第 i 与第 j 个界面(A_i 与 A_j 所对的侧面)上的单位向量 e_i,e_j 之间的夹角;φ'_{ij} 为单形 $\mathscr{A}'$ 中和 $P'A'_i$ 与 $P'A'_j$ 方向一致的单位向量 $\varepsilon'_i,\varepsilon'_j$ 之间的夹角.

证明 由 Cauchy 不等式,有

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\mu_j\Big)\sin\alpha_i\sin\beta'_i\leqslant\Big[\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\mu_j\Big)\sin^2\alpha_i\Big]^{1/2}\Big[\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\mu_j\Big)\sin^2\beta'_i\Big]^{1/2},$$

将不等式(2.4)中的 β_i 换成 $\beta'_i(i=0,1,\cdots,n)$,利用引理 2.1,故不等式(3.1)成立.且由(2.3),(2.4)及 Cauchy 不等式等号成立条件知(3.1)式等号成立的充分必要条件为(3.2),(3.3)式均成立.

为了给出定理 3.1 的应用,我们首先介绍如下的

引理 3.1 设 α_i 为 $E^n(n\geqslant 2)$ 中的 n 维单形 $\mathscr{A}$ 的第 i 个界面所对应的顶点角,$\mathscr{A}$ 的体积为 V,V_i 为 $\mathscr{A}$ 的第 i 个界面的 $n-1$ 维体积$(i=0,1,\cdots,n)$,则

$$V^{n-1}=\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}V_j\Big)\sin\alpha_i\ (i=0,1,\cdots,n). \tag{3.4}$$

引理 3.1 的证明可见[3]或[6].

引理 3.2 设 $E^n(n\geqslant 2)$ 中的 n 维单形 $\mathscr{B}:B_0B_1\cdots B_n$ 的体积为 V,向量 $\overrightarrow{B_0B_i},\overrightarrow{B_0B_j}$ 之间的夹角为 $r_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$.若记 $\overrightarrow{B_iB_j}=b_{ij}(i,j=0,1,\cdots,n)$,则有

$$V=\frac{1}{n!}\Big(\prod_{j=1}^{n}b_{0j}\Big)\det^{\frac{1}{2}}B, \tag{3.5}$$

其中 $B=(\cos r_{ij})_{n\times n}$.

证明 由单形的体积公式[7]

$$V^2=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n(n!)^2}D_{n+2}, \tag{3.6}$$

其中 D_{n+2} 为 $n+2$ 阶 Cayley-Menger 行列式

$$D_{n+2}=\begin{vmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & & & \\ \vdots & & b_{ij}^2 & \\ 1 & & & \end{vmatrix}\quad(i,j=0,1,\cdots,n)$$

将行列式 D_{n+2} 的第 3 行至第 $n+2$ 行都减去第 2 行,再把第 3 列至第 $n+2$ 列都减去第 2 列,然后把所得的行列式按第一行展开得 $n+1$ 阶行列式,把此 $n+1$ 阶行列式按第一列展开,可得

$$D_{n+2}=\begin{vmatrix}\omega_{11} & \cdots & \omega_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \omega_{n1} & \cdots & \omega_{nn}\end{vmatrix},$$

其中 $\omega_{ij}=b_{ij}^2-b_{i0}^2-b_{0j}^2(i,j=1,2,\cdots,h)$.将此行列式的第 i 行提取 $-b_{i0}$,第 j 列提取 $2b_{j0}=2b_{0j}$,利用三角形的余弦定理

$$b_{ij}^2-b_{i0}^2-b_{0j}^2=-2b_{i0}b_{j0}\cos r_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

便可得到

$$D_{n+2}=(-1)^{n+1}2^n(\prod_{j=0}^{n}b_{0j})^2\begin{vmatrix}1 & & & \cos r_{ij}\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \cos r_{ij} & & & 1\end{vmatrix}\tag{3.7}$$

由(3.6),(3.7)即得(3.5).

下面我们利用定理3.1来证明定理1.1.

将不等式(3.1)中的 α_i,β_i 分别改为 α_i',β_i,则有

$$\sum_{i=0}^{n}(\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\mu_j)\sin\alpha_i'\sin\beta_i\leqslant\frac{1}{n^n}(\sum_{i=0}^{n}\mu_i)^n.\tag{3.1$'$}$$

在不等式(3.1)′中令 $\mu_i=x_iV_i'$,由引理3.1及引理3.2知

$$(\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}V_j')\sin\alpha_i'=\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}V'^{(n-1)}\quad(i=0,1,\cdots,n).$$

而 $\frac{1}{n!}(\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\overline{PA_j})\sin\beta_i$ 为单形 $A_0A_1\cdots A_{i-1}PA_{i+1}\cdots A_n(i=0,1,\cdots,n)$ 的体积,故由(3.1)′可得

$$\frac{1}{n^n}(\sum_{i=0}^{n}x_iV_i')^n\geqslant\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}V'^{(n-1)}\sum_{i=0}^{n}(\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}x_j)\sin\beta_i=n^nVV'^{(n-1)}.$$

整理后即得(1.1),且由不等式(3.1)等号成立条件可知(1.1)式等号成立的充分必要条件为下列各式均成立:

$$\begin{aligned}\frac{x_iV_i'}{\sum_{l=0}^{n}x_lV_l'}&=\frac{\cos\theta_{jk}'}{n(\cos\theta_{jk}'-\cos\theta_{ij}'\cos\theta_{ik}')}\\&=\frac{\cos\varphi_{jk}}{n(\cos\varphi_{jk}-\cos\varphi_{ij}\cos\varphi_{ik})}\quad\begin{pmatrix}i,j,k=0,1,\cdots,n\\i\neq j,i\neq k,j\neq k\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{3.8}$$

且

$$\frac{\sin\alpha_0'}{\sin\beta_0}=\frac{\sin\alpha_1'}{\sin\beta_1}=\cdots=\frac{\sin\alpha_n'}{\sin\beta_n},\tag{3.9}$$

其中 θ_{ij}' 为单形 $\mathscr{A}'$ 的顶点 A_i',A_j' 所对侧面上的单位法向量 $\mathbf{e}_i',\mathbf{e}_j'$ 之间的夹角;φ_{ij} 为单形 $\mathscr{A}$ 和 $\overrightarrow{PA_i},\overrightarrow{PA_j}$ 方向一致的单位向量 $\varepsilon_i,\varepsilon_j$ 之间的夹角.

定义3.1 设 P 为 n 维单形 $\mathscr{A}:A_0A_1\cdots A_n$ 内部任意一点,自 P 向顶点 A_i 的对面($n-1$ 维单形)的作垂线的垂足为 $D_i(i=0,1,\cdots,n)$,则称 n 维单形 $\mathscr{D}:D_0D_1\cdots D_n$ 为单形 $\mathscr{A}$ 关于点 P 的垂足单形.

关于垂足单形,有如下的

定理3.2 n 维($n\geqslant2$)单形 $\mathscr{A}:A_0A_1\cdots A_n$ 的体积 V 与其关于点 P 的垂足单形 $\mathscr{D}:D_0D_1\cdots D_n$ 的体积 V_D 之间有关系式[5]

$$V_D\leqslant\frac{1}{n^n}V,\tag{3.10}$$

其中等号成立的充分必要条件为下列各式均成立:

$$\tau_i=\frac{\cos\theta_{jk}}{n(\cos\theta_{jk}-\cos\theta_{ij}\cos\theta_{ik})}\quad\begin{pmatrix}i,j,k=0,1,\cdots,n\\ i\neq j,i\neq k,j\neq k\end{pmatrix},\tag{3.11}$$

这里 τ_i 为点 P 的重心规范坐标($i=0,1,\cdots,n$).

证明 由定义 3.1,若令$\overline{PD_i}=r_i(i=0,1,\cdots,n)$,对于垂足单形 $\mathscr{D}$ 与单形 $\mathscr{A}'$,利用不等式(1.1),可得

$$(\sum_{i=0}^{n}r_iV'_i)^n\geqslant n^{2n}V_DV'^{(n-1)},\tag{3.12}$$

特别地取 $\mathscr{A}'=\mathscr{A}$,由 $\sum\limits_{i=0}^{n}r_iV_i=nV$,即得(3.10).

由(1.1)式等号成立条件,注意到 PD_i 与 A_i 所对的侧面垂直(单形 $\mathscr{A}$ 的垂足单形 $\mathscr{D}$ 的内顶角即为单形 $\mathscr{A}$ 的顶点角),并由重心规范坐标的定义可知不等式(3.10)中等号成立的充分必要条件为(3.14)式成立.

利用定理 3.2,我们可得如下的

推论 3.1 设 P 为 n 维($n\geqslant2$)单形 $\mathscr{A}:A_0A_1\cdots A_n$ 内部任意一点,P 到 A_i 所对侧面的距离为$\overline{PD_i}=r_i(i=0,1,\cdots,n)$.若单形 $\mathscr{A}$ 的体积为 V,A_i 所对侧面的 $n-1$ 维体积为 $V_i(i=0,1,\cdots,n)$,则有

$$\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{r_j}{V_j}\leqslant[\frac{(n-1)!^2}{n^{n-1}}]\frac{1}{V^{n-2}},\tag{3.13}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{V_j}{r_j}\leqslant[\frac{n^{n-1}(n+1)}{(n-1)!}]^2V^{n-2}.\tag{3.14}$$

(3.13)式等号成立的充分必要条件为(3.11)式成立;(3.14)式等号成立的充分必要条件为(3.11)式成立且 P 为单形 $\mathscr{A}$ 关于点 P 的垂足单形 $\mathscr{D}$ 的重心.

证明 设 α_i 为单形 $\mathscr{A}:A_0A_1\cdots A_n$ 的第 i 个界面(A_i 所对的侧面)所对应的顶点角,由单形内顶角的定义知 α_i 亦为 $\mathscr{A}$ 的关于点 P 的垂足单形 $\mathscr{D}:D_0D_1\cdots D_n$ 以 P 为顶点且对应于 $D_i(i=0,1,\cdots,n)$的内顶角.若令单形 $D_0D_1\cdots D_{i-1}PD_{i+1}\cdots D_n$ 的体积为 $V_{D_i}(i=0,1,\cdots,n)$,则由引理 3.1,引理 3.2 知

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{r_j}{V_j}&=\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{r_j\sin\alpha_i}{V_j\sin\alpha_i}=\frac{(n-1)!\cdot n!}{n^{n-1}V^{n-1}}\sum_{i=0}^{n}V_{D_i}\\ &=\frac{[(n-1)!]^2}{n^{n-2}}\frac{V_D}{V^{n-1}}.\end{aligned}$$

利用不等式(3.12),所以

$$\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{r_j}{V_j}\leqslant[\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}]^2\frac{1}{V^{n-2}}.\tag{3.13}$$

因为

$$\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{V_j}{r_j}=\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{V_j\sin\alpha_i}{r_j\sin\alpha_i}=\frac{n^{n-1}V^{n-1}}{(n-1)!\cdot n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{V_{D_i}}.$$

由算术—调和平均不等式及不等式(3.12),

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{V_{D_i}}\geqslant\frac{(n+1)^2}{\sum_{i=0}^{n}V_{D_i}}=\frac{(n+1)^2}{V_D}\geqslant\frac{(n+1)^2n^n}{V},$$

所以

$$\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{V_j}{r_j}\geqslant\left[\frac{n^{n-1}(n+1)}{(n+1)!}\right]^2V^{n-2}, \tag{3.14}$$

而其中等号成立的充分必要条件为(3.11)式成立且所有的 V_{D_i} 均相等亦即 P 为垂足单形 $\mathscr{D}$: $D_0D_1\cdots D_n$ 的重心.

参 考 文 献

[1] G. Tsintsifas, *A generalization of a two triangles inequality*, Elem. Math., 42(1987), 6:150—153.

[2] P. Bortoš, Časopis Pěst Mat., 93(1968), 273—277.

[3] 蒋星耀, 关于高维单形顶点角的不等式, 数学年刊, 8(A)(1987), 6:668—670.

[4] 苏化明, 关于单形的一个不等式, 数学通报, 1985, 5:43—46.

[5] 苏化明, 关于单形的三角不等式, 数学研究与评论, 13(1993), 4:599—604..

[6] 刘根洪, E^n 中的正弦定理及应用, 数学研究与评论, 9(1989), 1:45—52.

[7] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, New York, 2nd. ed, 1970.

A Class of Inequalities Involving Two Simplices and Their Applications

Su Huaming

(Hefei University of Technology, 230009)

Abstract

A class of inequalities involving two simplices are given in this paper. As their applications, we can prove a geometry inequality in [1] and a conjucture in [5].

Keywords vertex angle, inside vertex angle, simplex, inequality.