分次PP环的一个结论*

陈清华
(福建师范大学数学系，福州350007)

摘要　本文证明了Z-型分次简约环 $R=\bigoplus_{n\in Z}R_n$ 是PP环(Baer环)的充要条件是R是分次PP环(分次Baer环).

关键词　(分次)PP环，(分次)Baer环，(分次)简约环.
分类号　AMS(1991) 16W50/CCL O153.3

本文所及的环均指有单位元的结合环.

设 G 是一个乘群，R 是环，如果 R 是子加群 $\{R_\sigma\}|\sigma\in G\}$ 的直和，即 $R=\bigoplus_{\sigma\in G}R_\sigma$ 且对任意 $\sigma,\tau\in G$，有 $R_\sigma R_\tau\subseteq R_{\sigma\tau}(R_\sigma R_\tau=R_{\sigma\tau})$，则称 R 是 G-型分次(强分次)环；$h(R)$ 表示 R 的全体齐次元素，即 $h(R)=\bigcup_{\sigma\in G}R_\sigma$；$l_R(S)$ 表示 R 的子集 S 的左零化子. 我们知道一个分次环所具有的分次性质在不考虑分次的情形能否保持下来是分次环研究的主要问题之一. 本文就分次PP环的情形加以讨论. 同PP环，Baer环，简约环(Reduced)一样，一个分次环称为分次左(右)PP环，如果它的分次主左(右)理想是分次投射的；一个分次环称为分次左(右)Baer环，如果它的任一齐次元素构成的子集的左(右)零化子可由一个齐次幂等元生成；而一个分次环称为分次简约环，如果它没有非平凡的齐次幂零元.

本文仅讨论左的情况，所指的理想均为左理想，有关分次环的概念可参阅[2].

为了证明主要结论，先证几个引理：

引理1　设 $R=\bigoplus_{n\in Z}R_n$ 是Z-型分次简约环，

$$a=a_{-m}+a_{-m+1}+\cdots+a_0+a_1+\cdots+a_n\in R,$$
$$b=b_{-s}+b_{-s+1}+\cdots+b_0+b_1+\cdots+b_t\in R,$$

其中 $a_i\in R_i(-m\leqslant i\leqslant n)$，$b_j\in R_j(-s\leqslant j\leqslant t)$，则 $ab=0$ 当且仅当 $a_ib_j=0(-m\leqslant i\leqslant n,-s\leqslant j\leqslant t)$.

证明　充分性是显然的. 现证必要性. 若 $ab=0$，不妨设 $s=m$，$t=n$. 因为 $R=\bigoplus_{n\in Z}R_n$，所以可得下列等式组

$$a_{-m}b_{-m}=0,$$
$$a_{-m+1}b_{-m}+a_{-m}b_{-m+1}=0,$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$a_nb_{-m}+\cdots+a_{-m}b_n=0,$$

* 1991年10月8日收到. 国家自然科学基金和福建省自然科学基金资助课题.

由于 R 是分次简约环，因而 $a_{-m}b_{-m}=0 \Leftrightarrow b_{-m}a_{-m}=0$，在上述等式组的第二等式两边左乘 b_{-m} 得 $b_{-m}a_{m+1}b_{-m}=0$，故 $(a_{-m+1}b_{-m})^2=0$，从而 $a_{-m+1}b_{-m}=0$. 根据同样的道理，从以上的等式组可以证明 $a_ib_{-m}=0$ 对一切 $-m\leqslant i\leqslant n$ 均成立，并代入上述等式组可得新的等式组

$$
\begin{aligned}
&a_{-m}b_{-m+1}=0,\\
&a_{-m+1}b_{-m+1}+a_{-m}b_{-m+2}=0,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\\
&a_{n-1}b_{-m+1}+\cdots+a_{-m}b_n=0.
\end{aligned}
$$

再根据 $a_{-m}b_{-m+1}=0 \Leftrightarrow b_{-m+1}a_{-m}=0$，可证 $a_ib_{-m+1}=0$ 对一切 $-m+1\leqslant i\leqslant n$ 均成立. 继续这个过程就可得 $a_ib_j=0$ 对一切 $-m\leqslant i,j\leqslant n$ 均成立，引理获证.

引理 2 如果 $R=\bigoplus_{n\in Z}R_n$ 是 Z-型分次简约环，$f\in R$ 且 $f^2=f$，则 $f\in R_0$.

证明 设 $f=\sum_{j=s}^{1}f_{-j}+f_0+\sum_{i=1}^{t}f_i$，其中 $f_m\in R_m$，$-s\leqslant m\leqslant t$. 根据（[2]命题 I.1.1），$1\in R_0$，所以 $1-f=-\sum_{j=s}^{1}f_{-j}+(1-f_0)-\sum_{i=1}^{t}f_i$. 而由 $f^2=f$ 得 $f(1-f)=0$. 利用引理 1 得 $f_0(1-f_0)=0$ 且 $f_m^2=0$ 对一切 $-s\leqslant m\neq 0\leqslant t$ 均成立. 但 R 是分次简约环，故 $f_m=0$ 对一切 $-s\leqslant m\neq 0\leqslant t$ 均成立. 即 $f=f_0\in R_0$，证毕.

引理 3 设 $R=\bigoplus_{n\in Z}R_n$ 是 Z-型分次简约环，$S\subseteq R$ 若 $T=h(S)$ 表示 S 的一切齐次分量的全体，则 $l_R(S)=l_R(T)$.

证明 显然 $l_R(T)\subseteq l_R(S)$. 另一方面，任取 $g\in l_R(S)$ 即对任意 $f\in S$，有 $gf=0$. 从而由引理 1 知对任意的 $t\in T$ 有 $gt=0$，即 $t\in l_R(T)$. 所以 $l_R(T)=l_R(s)$.

同 PP 一样，根据[2]的有关结论，有：

引理 4 分次环 $R=\bigoplus_{n\in Z}R_n$ 是分次左 PP 环的充要条件是 R 的任一齐次元素的左零化子由一个齐次幂等元生成.

证明 R 是分次左 PP 环$\Leftrightarrow$任意 $r\in h(R)$，Rr 是分次投射的；

$\Leftrightarrow$在范畴 Rr 中，$0\to l_R(r)\to R\to Rr\to 0$ 是可裂的；

$\Leftrightarrow l_R(r)$是 R 的分次直和项；

$\Leftrightarrow l_R(r)$可由一个齐次幂等元生成.

有了以上的准备工作，下面来证明主要定理：

定理 1 设 $R=\bigoplus_{n\in Z}R_n$ 是分次简约环，同 R 是左 PP 环当且仅当 R 是分次左 PP 环.

证明 若 R 是 PP 环，任取 $r\in h(R)$，Rr 是 R 的分次主左理想，当然是 R 是主左理想，从而是投射的，根据（[2]推论 I.2.2），Rr 是分次投射的，故 R 是分次左 PP 环.

反之，假设 R 是分次左 PP 环. 首先注意对 $a,b\in h(R)$，根据引理 4，$l_R(a)=R_{e_1}$，$l_R(b)=R_{e_2}$，这里 $e_1^2=e_1$，$e_2^2=e_2\in R_0$. 令 $e=e_1e_2$，有 $e^2=e$（因为这时 e_1,e_2 是属于 R 的中心），从而不难证明 $l_R(\{a,b\})=R_e$. 故对任意的有限子集 $T\subseteq h(R)$，存在幂等元 $e\in R_0$ 使得 $l_R(T)=R_e$. 现任取 $r=\sum_{i=1}^{s}r_{n_i}$，$r_{n_i}\in R_{n_i}$，由引理 3，$l_R(r)=l_R(\{r_{n_1},r_{n_2},\cdots,r_{n_s}\})=R_e$，这里 $e\in R_0$ 且 $e^2=e$，即 R 是左 PP 环.

定理 2 设 $R=\bigoplus_{n\in Z}R_n$ 是分次简约环，则 R 是左 Baer 环充要条件是 R 分次左 Baer 环.

证明 假设 R 是左 Baer 环，任取 $T\subseteq h(R)$，则 $l_R(T)=R_e$，这里 e 是 R 的幂等元. 根据引理 2，$e\in R_0$，即 e 是分次幂等元，从而 R 是分次左 Baer 环.

反之，若 R 是分次左 Baer 环，任取 $S\subseteq R$，根据引理 3，$l_R(S)=l_R(T)$，这里 $T=h(S)$，从而存在分次幂等元 $e\in R$，使得 $l_R(S)=l_R(T)=R_e$，故 R 是左 Baer 环.

下面再证明 2 个相关的结果.

命题 1 设 $R=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}R_n$ 是 $\mathbf{Z}$-型分次简约环. 若 R 是左 PP 环（左 Baer 环），则 R_0 也是左 PP 环(Baer 环).

证明 任取 $r_0\in R_0$，由于 R 是左 PP 环，所以 $l_{R_0}(r_0)=l_R(r_0)\cap R_0=R_e\cap R_0=(R_0)e$，这里的 e 是 R 的幂等元，从而根据引理 2 知 e 是 R_0 的幂等元. 即 R_0 是左 PP 环. Baer 环的情形同理可证.

命题 2 设 $R=\bigoplus_{\sigma\in G}R_\sigma$ 是 G-型强分次环（这里 G 是乘群，e 是其单位元）. 若 R 是分次左 PP 环，则 R_e 也是左 PP 环.

证明 任取 R_e 的左主理想 $I=(R_e)r_e$，则 $R\bigotimes_{R_e}I=R\bigotimes_{R_e}[(R_e)r_e]=(R\bigotimes_{R_e}R_e)r_e=Rr_e$ 是 R 的分次主左理想，从而是分次投射的，根据([2]定理 I . 3. 4)，I 是 R_e 的投射主左理想，故 R_e 是左 PP 环.

命题 3 设 $R=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}R_n$ 是 $\mathbf{Z}$-型正(或负)分次环(即 $R_n=0,n<0$(或 $n>0$))，若 R 是左 PP 环，则 R_0 也是左 PP 环.

证明 任取 $a_0\in R_0$，因为 R 是左 PP 环，故存在 $r=r_0+r_1+\cdots+r_m\in R,r_i\in R_i(i=1,\cdots,m)$ 且 $r^2=r$ 使得 $l_R(a_0)=Rr$. 但由 $r^2=r$ 可得 $r_0^2=r_0$. 又因为 $ra_0=0$，所以 $r_0a_0=0$，故 $R_0r_0\subseteq l_{R_0}(a_0)$. 另一方面，对任意的 $b_0\in l_{R_0}(a_0)\subseteq l_R(a_0)$，存在 $s=s_0+\cdots+s_t,s_i\in R_i(i=1,\cdots,t)$ 使得 $b_0=sr$，从而 $b_0=s_0r_0\in R_0r_0$. 故 $l_{R_0}(a_0)=R_0r_0$ 即 R_0 是左 PP 环. 对负分次的情形同理可证.

一般说来，上述命题的逆命题(即使是强分次的)是不成立的. 例如：整数环上的 2 阶方阵环 $R=\mathbf{Z}^{2\times 2}$ 是 PP 环，但 $R[x]$ 不是 PP 环(见[1])，而 $R[x]$ 是 $\mathbf{Z}$-型正分次环.

作者衷心感谢陈昭木教授，薛卫民教授的热情指导与帮助.

参 考 文 献

[1] E. P. Armendariz, *A note on extensions of Baer and PP rings*, Austral. Math. Soc., 18(1974), 470—473.

[2] C. Năstăsescu and F. Van Oystaegen, *Graded Ring Theory*, North Holland (Amsterdan), 1982.