第15卷第3期
1995年8月
数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 15 No. 3
Aug. 1995

简单对角BL时间序列模型的参数的矩估计及其渐近分布*

陈 家 鑫
(汕头大学数学系，广东 515063)

摘 要 本文研究简单对角BL模型 $x_t=e_t+bx_{t-1}e_{t-1}$ 参数 b 和 σ_e^2 的估计问题，其中 $\{e_t\}$ 是白噪声，$E(e_t)=0$，$e(e_t^8)<+\infty$；证明了矩估计 $\hat{b}$ 和 $\hat{\sigma}_e^2$ 的渐近正态性.

关键词 对角BL时间序列模型，矩估计，依分布收敛，依概率收敛，极限分布.
分类号 AMS(1991) 62M10/CCL O212.1

一般的双线性时间序列模型 $BL(p,q;r,s)$

$$x_t=\sum_{j=1}^{p}\varphi_j x_{t-j}+e_t+\sum_{i=1}^{q}\theta_i e_{t-i}+\sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}b_{kl}x_{t-k}e_{t-l}$$

是ARMA(p,q)模型的直接推广，用它来描述某些非线性现象要比用线性的ARMA模型更为精确. 八十年代初K. C. Chanda和G. B. Quinn等人研究了这类模型的平稳性和可逆性[1-4]，九十年代初，W. K. Kim在Gauss噪声的情况下，给出简单对角BL模型

$$x_t=e_t+bx_{t-1}e_{t-1},\tag{1}$$

参数 b 和 σ_e^2 的矩估计[5]，作者也在残差方差 σ_e^2 已知的前提下，给出一类非Gauss噪声 $\{e_t\}$ 序列的模型(1)参数 b 的矩估计及其极限分布[6]. 目前尚无辨识一般双线性模型的强有力准则及建模方法，有许多问题仍待研究，无论理论或应用均处于发展阶段.

一 几个中心极限定理

在本文的研究中，假设模型(1)的白噪声序列 $\{e_t\}$ 具有8阶原点矩且 $E(e_t^m)=0$，$m=1,3,5,7$，$E(e_t^2)=\sigma_e^2$，$E(e_t^4)=\eta\sigma_e^4$，$E(e_t^6)=\delta\sigma_e^6$，$E(e_t^8)=\beta\sigma_e^8$，并假设 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 是来自模型(1)的一段样本，样本均值及样本自协方差函数取如下形式：

$$\overline{X}_N=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}x_t,\quad \hat{r}(k)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}x_t x_{t+k}.$$

通过对模型(1)的均值及自协方差的计算，可建立参数 b 和 σ_e^2 的矩估计量如下：

$$\hat{\sigma}_e^2=\frac{\hat{r}^2(0)-(\eta-2)\hat{r}(1)+\sqrt{\hat{r}^2(0)-2\eta\hat{r}(0)\hat{r}(1)+\eta(\eta-4)\hat{r}^2(1)}}{2},\tag{2}$$

* 1992年7月2日收到. 94年8月收到修改稿.

$$\hat{b} = \frac{2\bar{x}_N}{\hat{r}(0) - (\eta - 2)\hat{r}(1) + \sqrt{\hat{r}^2(0) - 2\eta\hat{r}(0)\hat{r}(1) + \eta(\eta - 4)\hat{r}^2(1)}} \tag{3}$$

记 $\lambda = b\sigma_e$,通过 m 次迭代并略去尾项,取 x_t 的近似值 $u_{tm} = e_t + \sum_{j=1}^{m}(\prod_{k=1}^{j} be_{t-k})e_{t-j}, t = 1,2,\cdots$,于是尾项为 $w_{tm} = x_t - u_{tm}$. 通过对矩量的计算并运用 L^2 空间的性质和 Chebyshev 不等式,可以证明关于 N 一致地成立关系式:$\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.p}} \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=1}^{N} w_{tm} = 0$ ("l. i. p"表示依概收敛性);同理,用 $\hat{r}_m(k) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k} u_{tm}u_{t+km}$ 来近似 $\hat{r}(k)$ 并用 Δ_k 表示由 $\{w_{tm}\}$ 和 $\{u_{tm}\}$ 所确定的如下关系式的尾项,即 Δ_k 满足:

$$\sqrt{N}[\hat{r}(k) - r(k)] = \sqrt{N}[\hat{r}_m(k) - r_m(k)] + \Delta_k, k = 0,1.$$

也可以证明关于 N 一致地成立关系式:$\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.p}}\Delta_k = 0, k = 0,1$. 显然,我们采用 $\bar{u}_N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u_{tm}$ 来近似 $\bar{X}_N$ 是理想的事.

根据上述分析,我们证明了如下的两个中心极限定理

定理 1.1 $\{u_{tm}\}_{t=1,2,\cdots}$ 是平稳的 m-独立序列且成立:

$$\sqrt{N}\begin{pmatrix} \bar{u}_N - \lambda\sigma_e \\ \hat{r}_m(0) - r_m(0) \\ \hat{r}_m(1) - r_m(1) \end{pmatrix} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathscr{L}} N(0,\Sigma^*),$$

其中"$\mathscr{L}$"表示依分布收敛性,$r_m(k)$ 表示 $\{u_{tm}\}_{t=1,2,\cdots}$ 的自协方差函数,$\Sigma^* = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^* & \sigma_{12}^* & \sigma_{13}^* \\ \sigma_{12}^* & \sigma_{22}^* & \sigma_{23}^* \\ \sigma_{13}^* & \sigma_{23}^* & \sigma_{33}^* \end{pmatrix}$ 是 3 ×3 的对称矩阵,其元素 σ_{ij}^* 按下式计算:

$$\sigma_{11}^* = \sum_{k=-(m+1)}^{m+1} \mathrm{cov}(u_{tm}, u_{t+km}), \qquad \sigma_{12}^* = \sum_{k=-(m+1)}^{m+1} \mathrm{cov}(u_{tm}, u_{t+km}^2),$$

$$\sigma_{13}^* = \sum_{k=-(m+1)}^{m+1} \mathrm{cov}(u_{tm}, u_{t+km}u_{t+(k+1)m}), \qquad \sigma_{22}^* = \sum_{k=-(m+1)}^{m+1} \mathrm{cov}(u_{tm}^2, u_{t+km}^2),$$

$$\sigma_{23}^* = \sum_{k=-(m+1)}^{m+1} \mathrm{cov}(u_{tm}^2, u_{t+km}u_{t+(k+1)m}), \qquad \sigma_{33}^* = \sum_{k=-(m+1)}^{m+1} \mathrm{cov}(u_{tm}u_{t+1m}, u_{t+km}u_{t+(k+1)m}).$$

定理 1.2 设 $r(0), r(1)$ 是简单双线性时间序列 $\{x_t\}$ 的自协方差函数,则成立

$$\sqrt{N}\begin{pmatrix} \bar{X}_N - \lambda\sigma_e \\ \hat{r}(0) - r(0) \\ \hat{r}(1) - r(1) \end{pmatrix} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathscr{L}} N(0,\Sigma).$$

证明 注意到

$$\sqrt{N}(\bar{X}_N-\lambda\sigma_e)=\sqrt{N}(\bar{u}_N-\lambda\sigma_e)+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}w_{im},$$

$$\sqrt{N}(\hat{r}(0)-r(0))=\sqrt{N}(\hat{r}_u(0)-r_u(0))+\Delta_0,$$

$$\sqrt{N}(\hat{r}(1)-r(1))=\sqrt{N}(\hat{r}_u(1)-r_u(1))+\Delta_1$$

及 $\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.p}}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}w_{im}=0,\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.p}}\Delta_0=0,\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.p}}\Delta_1=0$，可得

$$\sqrt{N}(\bar{X}_N-\lambda\sigma_e)\underset{N\to\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\rightarrow}}N(0,\sigma_{11}),$$

$$\sqrt{N}(\hat{r}(0)-r(0))\underset{N\to\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\rightarrow}}N(0,\sigma_{22}),$$

$$\sqrt{N}(\hat{r}(1)-r(1))\underset{N\to\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\rightarrow}}N(0,\sigma_{33}),$$

其中 $\sigma_{kk}=\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_{kk}^{*},k=1,2,3.$

类似的方法可证明$\sqrt{N}(\bar{X}_N-\lambda\sigma_e),\sqrt{N}(\hat{r}(0)-r(0)),\sqrt{N}(\hat{r}(1)-r(1))$的任意线性组合服从中心极限定理，于是三维随机向量$\sqrt{N}\begin{pmatrix}\bar{X}_N-\lambda\sigma_e\\ \hat{r}(0)-r(0)\\ \hat{r}(1)-r(1)\end{pmatrix}$在 $N\to\infty$时，以正态分布 $N(0,\Sigma)$为其极限分布，并且由定理 1.1 的结论，可经直接计算求得 $\Sigma\stackrel{\triangle}{=}\begin{pmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\sigma_{13}\\ \sigma_{12}&\sigma_{22}&\sigma_{23}\\ \sigma_{13}&\sigma_{23}&\sigma_{33}\end{pmatrix}$的各元素，即 $\sigma_{ij}=\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_{ij}^{*}$.

Σ 各元素的表示式如下：

$$\sigma_{11}=(1+\eta\lambda^2-\lambda^4)\sigma_e^2/(1-\lambda^2),$$

$$\sigma_{12}=\lambda[(1+\eta)+(\eta+\delta-2)\lambda^2+(3\eta^2-3\eta-\delta+1)\lambda^4]\sigma_e^3/(1-\lambda^2)^2,$$

$$\sigma_{13}=\lambda[(1+\eta)+(5\eta-1)\lambda^2+(\delta-3\eta)\lambda^4+(3\eta^2-\delta)\lambda^6]\sigma_e^3/(1-\lambda^2),$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22}=2[&(\eta-1)+(2\delta-\eta+3)\lambda^2+(\beta-4\delta-3\eta^2+6\eta)\lambda^4\\&+(2\delta-\beta+2\eta^2-12\eta+4\eta\delta+1)\lambda^6+(-\beta+3\eta^3-9\eta^2+3\eta+4\eta\delta)\lambda^8\\&+(\beta-\eta^3+9\eta^2-\eta-8\eta\delta)\lambda^{10}]\sigma_e^4/(1-\lambda^2)^3(1-\eta\lambda^4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{23}=\lambda^2[&6\eta+8(\delta-\eta)\lambda^2+4(-3\delta+3\eta^2+\eta\delta)\lambda^4\\&+4(\delta+3\eta^3-3\eta^2-\eta\delta)\lambda^6]\sigma_e^4/(1-\lambda^2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33}=[&1+(\delta+3\eta-1)\lambda^2+(-\delta+6\eta^2+15\eta-4)\lambda^4\\&+(\beta+6\delta-3\eta^2-17\eta-\eta\delta+4)\lambda^6+(-\beta-6\delta-6\eta^3+2\eta^2+4\eta+7\eta\delta)\lambda^8\\&+(18\eta^2-4\eta-6\eta\delta)\lambda^{10}]\sigma_e^4/(1-\lambda^2)(1-\eta\lambda^4)\end{aligned}$$

二　矩估计的渐近正态性

定理 2.1　设模型(1)满足可逆性条件：$(\eta-1)\lambda^4+2\lambda^2-1<0$，则成立$\sqrt{N}(\hat{b}-b)\underset{N\to\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\rightarrow}}N(0,$

$C\Sigma C^{\tau}$). 其中 $\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{pmatrix}$，$\tau$ 表示转置运算，C 为三维向量($\frac{1}{\sigma_e^2}$, $-\frac{b}{2\sigma_e^2}(1+\frac{1-2\lambda^2+(\eta-1)\lambda^4}{1-2\lambda^2-(\eta-1)\lambda^4})$, $\frac{b}{2\sigma_e^2}(\eta-2+\frac{\eta+2\eta\lambda^2+\eta(\eta-3)\lambda^4}{1-2\lambda^2-(\eta-1)\lambda^4})$).

证明 可以证明存在正数 M，使成立：

$$\left|\sqrt{N}(\hat{b}-b)-\sqrt{N}C\begin{pmatrix}\bar{X}_N-\lambda\sigma_e\\ \hat{r}(0)-r(0)\\ \hat{r}(1)-r(1)\end{pmatrix}\right|$$

$$\leqslant\frac{M}{\sqrt{N}}\{N(\bar{X}_N-\lambda\sigma_e)^2+N(\hat{r}(0)-r(0))^2+N(\hat{r}(1)-r(1))^2\}$$

根据定理 1.2 并运用 Chebyshev 不等式，可以证明对任给正数 ε，有：

$$P\left\{\left|\sqrt{N}(\hat{b}-b)-\sqrt{N}C\begin{pmatrix}\bar{X}_N-\lambda\sigma_e\\ \hat{r}(0)-r(0)\\ \hat{r}(1)-r(1)\end{pmatrix}\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{E\left|\sqrt{N}(\hat{b}-b)-\sqrt{N}C\begin{pmatrix}\bar{X}_N-\lambda\sigma_e\\ \hat{r}(0)-r(0)\\ \hat{r}(1)-r(1)\end{pmatrix}\right|}{\varepsilon}$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{M}{\varepsilon}\{E[N(\bar{X}_N-\lambda\sigma_e)^2]+E[N(\hat{r}(0)-r(0))^2]+E[N(\hat{r}(1)-r(1))^2]\}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

于是 $\sqrt{N}(\hat{b}-b)$ 与 $\sqrt{N}C\begin{pmatrix}\bar{X}_N-\lambda\sigma_e\\ \hat{r}(0)-r(0)\\ \hat{r}(1)-r(1)\end{pmatrix}$ 有相同的极限分布，按照定理 1.2 的结论，本定理得证.

类似的方法，可证明如下的定理

定理 2.2 在定理 2.1 的条件下，成立 $\sqrt{N}(\hat{\sigma}_e^2-\sigma_e^2)\xrightarrow[N\to\infty]{\mathscr{L}}N(0,B\tilde{\Sigma}B^{\tau})$，其中 $\tilde{\Sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{pmatrix}$，$B$ 是二维向量($\frac{1}{2}[1+\frac{1-2\lambda^2+(\eta-1)\lambda^4}{1-2\lambda^2-(\eta-1)\lambda^4}]$, $\frac{1}{2}[(2-\eta)-\frac{\eta+2\eta\lambda^2+\eta(\eta-3)\lambda^4}{1-2\lambda^2-(\eta-1)\lambda^4}]$).

参 考 文 献

[1] T. D. Phan, *On the first-order bilinear time series model*, J. Appl. Prob., 18, 617—627, 1981.

[2] W. K. Kim, *Estimation for the first-order diagonal bilinear time series model*, J. of Time Series Analysis, Vol. 11, No. 3, 215—229, 1990.

[3] B. G. Quinn, *Stationarity and Invertibility of Simple bilinear models*, Stochastic proc and their Appl., 12, 225—230, 1982.

[4] K. C. Chanda, *Stationarity and central limit theorem with bilinear time series models*, J. of Time Series Analysis, Vol. 12, No. 4, 301—313, 1991.

[5] T. S. Rao, *On the theory of bilinear time series models*, J. R. Statist. Soc. B, 43, No. 2, 244—255, 1981.

[6] 陈家鑫，残差方差已知的双线性时间序列模型参数的矩估计及其渐近分布，汕头大学学报，Vol. 8, No. 1, 1994.

The Moment Estimator for the Diagonal BL Time Series Model and Its Asymptotic Distribution

Chen Jiaxin

(Dept. of Math., Shantou Univ., 515068)

Abstract

The problem of estimating the parameters b and σ_e^2 in the simple diagonal BL model $x_t = e_t + bx_{t-1}e_{t-1}$ is considered, where $\{e_t\}$ is white noise with $E(e_t) = 0, E(e_t^8) < +\infty$; The asymptotic normality of the moment estimator of b and σ_e^2 is proved.

Keywords BL model, moment estimation, invertibility, stationarity, convergence in distribution, convergence in probability, limit distribution.