第15卷第3期 数学研究与评论 Vol.15 No.3
1995年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1995

# 耦合不动点的若干存在定理*

周友明
(常州技术师范学院基础部,213015)

**关键词** 混合单调算子,耦合不动点.
**分类号** AMS(1991) 47H10/CCL O177.91

以下设 $E$ 是实 Banach 空间,其中范数为 $\|\cdot\|$,$P$ 是 $E$ 中的锥,$D=[u_0,v_0]$是 $E$ 中的序区间.对于 $w_0\in P\backslash\{\theta\}$,记 $E_{w_0}=\{x\in E\mid\exists\ \lambda>0,-\lambda w_0\leqslant x\leqslant\lambda w_0\}$,若 $x\in E_{w_0}$,令 $\|x\|_{w_0}=\inf\{\lambda\mid\lambda>0,-\lambda w_0\leqslant x\leqslant\lambda w_0\}$.并始终设 $A:D\times D\to E$ 是混合单调算子[3].

**定理1** 设 $P$ 是正规锥,设(i) $u_0\leqslant A(u_0,v_0),A(v_0,u_0)\leqslant u_0$; (ii) $A(D\times D)$是 $E$ 中弱列紧子集.则 $A$ 在 $D\times D$ 中必有耦合不动点.

**定理2** 设 $u_0<\theta<v_0$,且设定理1中条件(i),(ii)满足.又设 $E_{v_0}$ 中 $\|\cdot\|$ 强于 $\|\cdot\|_{v_0}$,$E_{-u_0}$ 中 $\|\cdot\|$ 强于 $\|\cdot\|_{-u_0}$.则 $A$ 在 $D\times D$ 中必有耦合不动点.

**定理3** 设 $P$ 是正则锥且定理1中(i)满足,则 $A$ 在 $D\times D$ 中必有耦合不动点.

**定理4** 设 $E^*$($E$ 的共轭空间)可分.设定理1中条件(i),(ii)满足,则 $A$ 在 $D\times D$ 中必有耦合不动点.

**定理5** 设定理1中条件(i)满足,并设下列条件之一满足:

(i) $P$ 是正规锥,$A(D\times D)$是弱列紧集;

(ii) $P$ 是正则锥.

又设 $A:D\times D\to E$ 是次连续的(即若$(x_n,y_n)\xrightarrow{\|\cdot\|}(x_0,y_0)$,则 $A(x_n,y_n)\xrightarrow{弱}A(x_0,y_0)$),则 $A$ 具有耦合不动点$(x^*,y^*)\in D\times D$,且 $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$,$y^*=\lim\limits_{n\to\infty}v_n$,这里 $u_n=A(u_{n-1},v_{n-1})$,$v_n=A(v_{n-1},u_{n-1})$,$n=1,2,\cdots$,它满足 $u_0\leqslant u_1\leqslant u_2\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant v_2\leqslant v_1\leqslant v_0$.
进一步,$(x^*,y^*)$在下面意义下是最小和最大的:$x^*\leqslant\bar{x}\leqslant y^*$,$x^*\leqslant\bar{y}\leqslant y^*$,对 $A$ 在 $D\times D$ 中的任何耦合不动点$(\bar{x},\bar{y})$.

## 参考文献

[1] 孙经先,数学年刊,11A(1990),407—412.
[2] 孙经先,数学学报,31(1988),101—107.
[3] Chen Yongzhuo, J. of Math. Anal. Appl., Vol. 154, No. 1(1991), 142—150.
[4] 孙经先,数学学报,34(1991),665—674.

* 1992年6月2日收到.94年5月4日收到修改稿.