第15卷第3期 1995年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 15 No. 3 Aug. 1995

关于Hamltion线图的一个结果*

刘春峰　　　　赵连昌
(锦州师专数学系，锦州 121001)　(大连海事大学基础部，116023)

摘　要　设 G 是一个简单图，$\forall e\in E(G)$，定义 $e=uv$ 在 G 中的度 $d(e)=d(u)+d(v)$，其中 $d(u)$ 和 $d(v)$ 分别为 u 和 v 的度数. 若连通图 G 的每个桥都有一个端点度数为 1，则称 G 是几乎无桥的图. 本文的主要结果是：设 G 是 $p\geqslant 2$ 阶几乎无桥的简单连通图，且 $G\not\cong K_{1,p-1}$. 若对任何无公共顶点的两边 e_0 及 e_1，$d(e_0)+d(e_1)\geqslant p+4$，则 G 有一个 D-闭迹，从而 G 的线图 $L(G)$ 是哈密顿的.

关键词　哈密顿线图，D-闭迹，几乎无桥
分类号　AMS(1991))5C45/CCL O157.5

引　言

本文只讨论简单无向图. 设 G 是顶点集为 $V(G)$，而边集为 $E(G)$ 的图. 图 G 的线图 $L(G)$ 是顶点集合为 $E(G)$，而边集合 $E(L(G))=\{e_1e_2|e_1,e_2\in E(G)$ 且 $|V(e_1)\cap V(e_2)|=1\}$ 的图. $\forall e\in E(G)$，定义 $e=uv$ 在 G 中的度 $d(e)=d(u)+d(v)$，其中 $d(u)$ 和 $d(v)$ 分别为 u 和 v 的度数. $S\subseteq V(G)$，用 $\langle S\rangle$ 表示 S 在 G 中的导子图. 若 G_1 和 G_2 为 G 的子图，$v\in V(G)$，用 $N_{G_1}(v)$ 表示在 G_1 中与 v 相邻接的点集合；$N_{G_2}(G_1)=\bigcup_{v\in V(G_1)}N_{G_2}(v)$；$A(G_1,G_2)=\{e|e=u_1u_2\in E(G),u_i\in V(G_i),i=1,2\}$；定义 G_1+G_2 是顶点集合为 $V(G_1+G_2)=V(G_1)\cup V(G_2)$，边集合 $E(G_1+G_2)=E(G_1)\cup E(G_2)$ 的图. $u,v\in V(G_1)$，用 $d_{G_1}(u,v)$ 表示 u 与 v 在 G_1 中的距离，即 G_1 中联接 u 与 v 的最短路的长. 用 $\Gamma(G)$ 表示图 G 中所有闭迹组成的集合，若 $T\in\Gamma(G)$，用 $\varepsilon_1(T)$ 表示 G 中至少有一端点在 T 上的边数，即 $\varepsilon_1(T)=|E(G)|-|E(G-V(T))|$. 若$\exists$ $T\in\Gamma(G)$，使得 $\varepsilon_1(T)=|E(G)|$，则称 T 为 G 的 D-闭迹. 一个连通图 G 的一条边 e 使 $G-e$ 非连通，则称 e 为 G 的一个桥，若 G 的所有桥都有一个端点度数为 1，则称 G 是几乎无桥的图[1,2].

Harary 和 Nash-Williams[3] 证明了：图 G 的线图 $L(G)$ 是哈密顿的当且仅当 G 有一个 D-闭迹或 $G\cong K_{1,s-1}$，其中 $s\geqslant 4$. 本文的目的是证明如下定理.

定理　设 G 是 $p\geqslant 2$ 阶几乎无桥的简单连通图，且 $G\not\cong K_{1,p-1}$. 若对 G 中任何两条无公共顶点的边 e_0 及 e_1，$d(e_0)+d(e_1)\geqslant p+4$，则 G 有一个 D-闭迹，从而 $L(G)$ 是哈密顿图.

由本文定理，当 $p\geqslant 10$ 时；可推出[2]中的定理 4；当 $p\geqslant 6$ 时，可推出[4]中的结果；还可推出[5]中的结果.

* 1992年5月26日收到. 94年5月收到修改稿.

1 几个引理

设 $A=\{T\mid T\in\Gamma(G)$ 且 $e_1(T)$ 最大$\}$，$A_0=\{T\mid T\in A$ 且 $|V(T)|$ 最大$\}$. 于是 $\forall\ T_0\in A_0$，不存在 $T_1\in\Gamma(G)$ 具有性质 M：$e_1(T_1)>e_1(T_0)$ 或 $e_1(T_1)=e_1(T_0)$ 且 $|V(T_1)|>|V(T_0)|$.

引理 1[1,2] 设 G 是连通图，若 $T_0\in A_0$，则不存在 $T_1\in\Gamma(G)$ 使得

$$V(T_0)\cap V(T_1)\neq\varnothing,V(T_1)\cap(V(G)-V(T_0))\neq\varnothing \text{ 且 } |E(T_0)\cap E(T_1)|\leqslant 1.$$

引理 2 设 G 是连通图，若 $T_0\in A_0$，K 是 $G-V(T_0)$ 的一个分支，$u_1,u_2\in N_{T_0}(K)\ (u_1\neq u_2)$ 且 $\forall\ u,v\in N_{T_0}(K)\ (u\neq v)$，$d_{G-V(K)}(u_1,u_2)\leqslant d_{G-V(K)}(u,v)$. 若 P_0 是 u_1 与 u_2 在 $G-V(K)$ 上的最短路，则 P_0 上至少有两条边不包含在 G 的三角形中.

证明 由引理 1，$|V(P_0)|\geqslant 3$. 设 $P_0=u_1w_1\cdots w_tu_2$. 用反证法. 分两种情形加以讨论.

情形 1 P_0 的所有边都包含在 G 的三角形中.

由 P_0 的取法，$w_iw_j\notin E(G)$，$i,j=0,1,\cdots,t+1$，$|i-j|\geqslant 2$（其中 $w_0=u_1$，$w_{t+1}=u_2$）. 因为 P_0 的所有边都在 G 的三角形中，所以 $\exists\ v_i\in V(G)-V(K)$，使得 $\{v_iw_{i-1},v_iw_i\}\subseteq E(G)$，$i=1,\cdots,t+1$. 由 P_0 的取法，$v_i\neq v_j$，$|i-j|\geqslant 2$，但可能有 $v_i=v_{i+1}$，$i=1,\cdots,t+1$.

对 P_0 上的边从 w_0w_1 开始给出如下算法：

(1) $C_0\leftarrow\varnothing$，

(2) (2.1) 若 $v_1\neq v_2$，对 w_0w_1，令

$$R_0=\begin{cases} w_0w_1, & w_0w_1\notin E(T_0),\\ -w_0w_1, & w_0w_1\in E(T_0) \text{ 且 } \{w_0v_1,v_1w_1\}\subseteq E(T_0),\\ \pm w_0v_1\pm v_1w_1, & w_0w_1\in E(T_0) \text{ 且 } \{w_0v_1,v_1w_1\}\nsubseteq E(T_0).\end{cases}$$

其中“±”，当“±”后面的边属于 $E(T_0)$ 时，取“－”；否则取“＋”. 令

$$C_0\leftarrow C_0+R_0.$$

(2.2) $v_1=v_2$，对 w_0w_1,w_1w_2，当 $\{w_0w_1,w_1w_2\}\subseteq E(T_0)$ 时，令

$$R_0=\begin{cases} \pm w_0v_1\pm v_1w_2, & \{w_0v_1,v_1w_2\}\nsubseteq E(T_0),\\ -w_0w_1-w_1w_2, & \{w_0v_1,v_1w_2\}\subseteq E(T_0) \text{ 且 } w_1v_1\in E(T_0),\\ -w_0w_1+w_1v_1-v_1w_2, & \{w_0v_1,v_1w_2\}\subseteq E(T_0) \text{ 且 } w_1v_1\notin E(T_0).\end{cases}$$

当 $\{w_0w_1,w_1w_2\}\nsubseteq E(T_0)$ 时，令

$$R_0=\begin{cases} w_0w_1+w_1w_2, & w_0w_1,w_1w_2\notin E(T_0),\\ -w_0w_1+w_1w_2, & w_0w_1\in E(T_0) \text{ 且 } \{w_0v_1,v_1w_1\}\subseteq E(T_0),\\ \pm w_0v_1\pm v_1w_1+w_1w_2, & w_0w_1\in E(T_0) \text{ 且 } \{w_0v_1,v_1w_1\}\nsubseteq E(T_0),\\ w_0w_1-w_1w_2, & w_1w_2\in E(T_0) \text{ 且 } \{w_1v_1,v_1w_2\}\subseteq E(T_0),\\ w_0w_1\pm w_1v_1\pm v_1w_2 & w_1w_2\in E(T_0) \text{ 且 } \{w_1v_1,v_1w_2\}\nsubseteq E(T_0).\end{cases}$$

令

$$C_0\leftarrow C_0+R_0.$$

(3) 若 $v_1\neq v_2$ 且 $v_2\neq v_3$，对 w_1w_2，令 $v_1\leftarrow v_2$，$w_{i-1}\leftarrow w_i\ (i=1,2)$ 重复 (2) 的 (2.1).

若 $v_1\neq v_2$ 且 $v_2=v_3$，对 w_1w_2,w_2w_3，令 $v_{i-1}\leftarrow v_i\ (i=2,3)$，$w_{i-1}\leftarrow w_i\ (i=1,2,3)$ 重复 (2) 的 (2.2). 如此进行下去，直到进行到 w_tw_{t+1} 为止.

(4) 停止.

设 P_1 是 u_1 与 u_2 间满足 $\varnothing\neq V(P_1-\{u_1,u_2\})\subseteq V(K)$ 的路，令 $T=T_0+C_0+P_1$，则 $T\in\Gamma(G)$ 且具有性质 M，矛盾.

情形 2 P_0 上恰好有一个边不包含在 G 的三角形中.

设 $w_kw_{k+1}(0\leqslant k\leqslant t)$ 不在 G 的三角形中，且设 $P_{01}=w_0\cdots w_k$，$P_{02}=w_{k+1}\cdots w_{t+1}$. 对 $P_{0i}(i=1,2)$ 进行情形 1 的算法可构造出与情形 1 中 C_0 相类似的 $C_{0i}(i=1,2)$，令 $T=T_0+C_{01}+C_{02}+P_1\pm W_kW_{k+1}$，则 $T\in\Gamma(G)$，且具有性质 M，矛盾.

引理 3 设 G 是连通图，若 $T_0\in A_0$，K 是 $G-V(T_0)$ 的一个分支，且 $|V(K)|\geqslant 2$，$u_1,u_2\in N_{T_0}(K)(u_1\neq u_2)$ 且 $\forall\ u,v\in N_{T_0}(K)(u\neq v)$，$d=d_{G-V(K)}(u_1,u_2)\leqslant d_{G-V(K)}(u,v)$，则有

(3.1) 若 $d=2$，且 $w\in N(u_1)\cap N(u_2)-V(K)$，则

(3.1.1) 不存在 T_0 中的圈恰好包含 u_1w 及 u_2w 之一，于是长为 2 的路 u_1wu_2 在 T_0 中的某个圈上.

(3.1.2) 若 $N(w)\subseteq V(T_0)$，则 w 为 T_0 的割点，进而 $d(w)\geqslant 3$.

(3.1.3) 若 $N(w)\nsubseteq V(T_0)$，即 $\exists\ w'\in V(G)-V(T_0)$ 使得 $ww'\in E(G)-E(T_0)$，则

$$N(w')\cap N(u_i)\cap V(G-\{w\})=\varnothing \text{ 且 } \forall\ v\in V(K),N(v)\cap N(w')=\varnothing.$$

(3.1.4)[2] $\forall\ v\in V(K)$，$N(v)\cap N(w)\cap(V(G)-(V(K)\cup\{u_1,u_2\}))=\varnothing$.

(3.2) 若 $d=2$，且 $w\in N(u_1)\cap N(u_2)-V(K)$，圈 $C=wx_0x_1\cdots x_sx_{s+1}w(x_0=u_1,x_{s+1}=u_2)$ 是 T_0 中包含 u_1wu_2 的最短圈，则

(3.2.1) $N(x_1)\cap N(w)\cap V(G-\{u_1,x_2\})=\varnothing$，$N(x_s)\cap N(w)\cap V(G-\{u_2,x_{s-1}\})=\varnothing$.

(3.2.2) 若 $|V(C)|\geqslant 5$，则

$$N(x_1)\cap N(u_2)\cap V(G-\{x_2,x_s\})=\varnothing \text{ 或 } N(x_s)\cap N(u_1)\cap V(G-\{x_1,x_{s-1}\})=\varnothing.$$

(3.2.3) $\forall\ v\in V(K)$，$N(x_1)\cap N(v)\cap V(G-\{u_1,x_2\})=\varnothing$，$N(x_s)\cap N(v)\cap V(G-\{u_2,x_{s-1}\})=\varnothing$.

(3.3) 若 $d=2$，且 $w_1,w_2\in N(u_1)\cap N(u_2)-V(K)$，$N(w_i)\subseteq V(T_0)$，则 $\exists\ w_i'\in V(T_0)-\{u_1,u_2,w_1,w_2\}$，使得 $w_iw_i'\in E(T_0)(i=1,2)$，$w_1'\neq w_2'$，并且有：

(3.31) $m_{1i}=|N(w_i')\cap N(u_1)\cap V(G-\{w_i\})|\leqslant 1$，

$m_{2i}=|N(w_i')\cap N(v)|\leqslant 1$，$\quad\forall\ v\in V(K)$，

$m_{3i}=|N(w_i')\cap N(w_j)|\leqslant 1$，$\quad(i,j=1,2$ 且 $i\neq j)$.

(3.3.2) $m_{1i}+m_{2i}+m_{3i}\leqslant 1$.

(3.4) 若 $d=3$，$w_i\in N(u_i)-V(K)$，$i=1,2$ 且 $w_1w_2\in E(G)$，则

(3.4.1) $N(u_1)\cap N(w_1)$，$N(u_2)\cap N(w_2)$ 及 $N(w_1)\cap N(w_2)$ 至少有两个为空集.

(3.4.2) $N(u_1)\cap N(w_2)\cap V(G-\{w_1\})$ 与 $N(u_2)\cap N(w_1)\cap V(G-\{w_2\})$ 至少有一个为空集.

(3.4.3) 若 $N(u_1)\cap N(w_1)\neq\varnothing$，则 $N(u_1)\cap N(w_2)\cap V(G-\{w_1\})=\varnothing$.

(3.4.4) 若 $N(w_1)\cap N(w_2)\neq\varnothing$，则 $N(u_1)\cap N(w_2)\cap V(G-\{w_1\}=\varnothing$ 且 $N(u_2)\cap N(w_1)\cap V(G-\{w_2\})=\varnothing$.

(3.5) 若 $d=4$，设 $P_0=u_1w_1w_2w_3u_2$ 是 u_1 与 u_2 间在 $G-V(K)$ 上的最短路. 若 $v\in N(u_1)\cap N(w_1)$，$v'\in N(u_2)\cap N(w_3)$，则 $N(u_1)\cap N(w_2)\cap V(G-\{w_1\})=\varnothing$，且 $N(w_2)\cap N(w_3)=\varnothing$.

2 定理的证明

若图 G 满足定理的条件，则 G 非树，从而 $\Gamma(G)\neq\varnothing$，且 $\Lambda_0\neq\varnothing$. 设 $T_0\in\Lambda_0$.

用反证法证明定理. 假设 $\varepsilon_1(T_0)\neq|E(G)|$. 因为 G 连通，所以 $G-V(T_0)$ 有一个分支 K 且 $|V(K)|>1$. 由引理 1 及 G 是几乎无桥的，有 $|N_{T_0}(K)|\geqslant 2$. 设 $u_1,u_2\in N_{T_0}(K)(u_1\neq u_2)$ 且 $\forall\ u,v\in N_{T_0}(K)(u\neq v)$，$d=d_{G-V(K)}(u_1,u_2)\leqslant d_{G-V(K)}(u,v)$. 设 $P_0=u_1w_1\cdots w_{d-1}u_2$ 为 $G-V(K)$ 上 u_1 与 u_2 间的最短路，并设 $P_1=u_1v_1\cdots v_ku_2$ 是 u_1 与 u_2 间满足 $\varnothing\neq V(P_1-\{u_1,u_2\})\subseteq V(K)$ 的路. 由引理 1，$d\geqslant 2$，下面分四种情形加以讨论.

情形 1　$d=2$.

此时由引理 1，$P_0=u_1w_1u_2\subseteq T_0$. 分如下两种子情形加以讨论.

情形 1.1　$N(w_1)\nsubseteq V(T_0)$.

此时 $\exists\ w_1'\in V(G)-V(T_0)$. 使得 $w_1w_1'\in E(G)-E(T_0)$. 由引理 1，$w_1'\in V(K)$. 设 $e_0=u_1v_1$，$e_1=w_1w_1'$；$V_0=\{u_1,v_1,w_1,w_1'\}$，显然 $V(e_0)\cap V(e_1)=\varnothing$. 由引理 1,2 和(3.1.4)，有

$$\Lambda(e_0,e_1)=\{u_1w_1\},\ |N_{\langle V_0\rangle}(u_2)|\leqslant 2.$$

由引理 2，引理 3(3.1.3)，有 $\forall\ x\in V(G-(V_0\cup\{u_2\}))$，

$$|N_{\langle V_0\rangle}(x)|\leqslant 1.$$

于是

$$\begin{aligned}d(e_0)+d(e_1)&\leqslant|V(G-(V_0\cup\{u_2\}))|+|N_{\langle V_0\rangle}(u_2)|+2|E(\langle V_0\rangle)|\\&\leqslant(p-5)+2+6<p+4,\end{aligned}$$

矛盾.

情形 1.2　$N(w_1)\subseteq V(T_0)$.

由引理 3(3.1.1)及(3.1.2)，$P_0=u_1w_1u_2$ 在 T_0 中的某个圈 $C=w_1u_1x_1\cdots x_su_2w_1$ 之上. 并且 w_1 为 T_0 的割点. 于是有如下子情形.

情形 1.2.1　$|V(C)|=4$.

设 $x_1=w_2$，即 $C=w_1u_1w_2u_2w_1$. $N(w_2)\subseteq V(T_0)$，否则把 w_2 看成 w_1，归为情形 1.1. 由引理 3(3.3)，$\exists\ w_i'\in V(T_0)-\{u_1,u_2,w_1,w_2\}$ 使得 $w_iw_i'\in E(T_0)(i=1,2)$，$w_1'\neq w_2'$. 设 $V_0=\{u_1,v_1,w_1',w_2\}$，由引理 1,2,(3.1.4),(3.2.1),(3.3.1),(3.3.2)，有

$$|N_{\langle V_0\rangle}(w_1)|=2,\ |N_{\langle V_0\rangle}(u_2)|\leqslant 2,\ |E(\langle V_0\rangle)|=2,$$

且 $V(G-(V_0\cup\{w_1,u_2\}))$ 中不存在点与 V_0 中三个点相邻接，且最多有一点与 V_0 中两点同时邻接，于是

$$\begin{aligned}&d(u_1)+d(v_1)+d(w_1')+d(w_2)\\&\leqslant|V(G-(V_0\cup\{w_1,u_2\}))|+|N_{\langle V_0\rangle}(u_2)|+|N_{\langle V_0\rangle}(w_1)|+2|E(\langle V_0\rangle)|\\&\leqslant[(p-6)+1]+2+2+4=p+3.\end{aligned}$$

同理有

$$d(u_1)+d(v_1)+d(w_2')+d(w_1)\leqslant p+3,$$

于是

$$[d(u_1v_1)+d(w_1w_1')]+[d(u_1v_1)+d(w_2w_2')]\leqslant 2p+6,$$

由此得 $d(u_1v_1)+d(w_1w_1')<p+4$ 或 $d(u_1v_1)+d(w_2w_2')<p+4$，矛盾.

情形 1.2.2 $|V(C)|\geqslant 5$.

由引理 3(3.2.2)，不妨设 $N(x_1)\cap N(u_2)\cap V(G-\{x_2,x_s\})=\varnothing$. 当 $|V(P_1)|\geqslant 4$ 时，取 $v_1'=v_2$，否则取 $v_1'\in N_k(v_1)$，由引理 1 及 C 的取法，有

$$N(u_1)\cap N(u_2)\cap V(G-\{w_1\})=\varnothing,$$
$$N(v_1)\cap N(u_2)\cap V(G-\{v_2\})=\varnothing.$$

设 $V_0=\{u_1,v_1,w_1,u_2\}$，$V_1=\{u_2,w_1,v_1',x_1\}$. 由引理 1,2 及(3.1.4)，(3.2.1)，(3.2.2)有

$$\begin{aligned}d(u_1)+d(v_1)+d(w_1)+d(u_2)&\leqslant|V(G-V_0)|+1+2|E(\langle V_0\rangle)|\\&\leqslant(p-4)+1+8=p+5,\end{aligned}$$

且当 $s\geqslant 3$ 时，

$$\begin{aligned}&d(u_2)+d(w_1)+d(v_1')+d(x_1)\\&\leqslant|V(G-(V_1\cup\{u_1,x_2,x_s\}))|+|N_{\langle V_1\rangle}(u_1)|+|N_{\langle V_1\rangle}(x_2)|+|N_{\langle V_1\rangle}(x_s)|+2|E(\langle V_1\rangle)|\\&\leqslant(p-7)+2+2+1+4=p+2.\end{aligned}$$

而 $s=2$ 时，易知

$$d(u_1)+d(w_1)+d(v_1')+d(x_1)\leqslant p+2.$$

于是

$$[d(u_1x_1)+d(u_2w_1)]+[d(u_2w_1)+d(v_1v_1')]\leqslant 2p+7,$$

得 $d(u_1x_1)+d(u_2w_1)<p+4$ 或 $d(u_2w_1)+d(v_1v_1')<p+4$，矛盾.

情形 2 $d=3$.

情形 2.1 $N(u_1)\cap N(w_1)=\varnothing$ 且 $N(u_2)\cap N(w_2)=\varnothing$.

由引理 3(3.4.2)，不妨设 $N(u_1)\cap N(w_2)\cap V(G-\{w_1\})=\varnothing$. 设 $V_0=\{u_1,v_1,w_2,u_2\}$，由引理 1,2 及 P_0 与 u_1,u_2 的取法，有

$$\begin{aligned}d(u_1v_1)+d(w_2u_2)&\leqslant|V(G-(V_0\cup\{w_1\})|+|N_{\langle V_0\rangle}(w_1)|+2|E(\langle V_0\rangle)|\\&\leqslant(p-5)+2+6<p+4,\end{aligned}$$

矛盾.

情形 2.2 $N(u_1)\cap N(w_1)\neq\varnothing$ 或 $N(u_2)\cap N(w_2)\neq\varnothing$.

不妨设 $N(u_1)\cap N(w_1)\neq\varnothing$，由引理 3(3.4.1)和(3.4.3)有 $N(u_2)\cap N(w_2)=\varnothing$ 且 $N(u_1)\cap N(w_2)\cap V(G-\{w_1\})=\varnothing$，与情形 2.1 同理有 $d(u_1v_1)+d(w_2u_2)<p+4$，矛盾.

情形 3 $d=4$.

情形 3.1 $N(u_1)\cap N(w_1)=\varnothing$ 或 $N(u_2)\cap N(w_3)=\varnothing$.

不妨设 $N(u_2)\cap N(w_3)=\varnothing$. 设 $V_0=\{u_1,v_1,w_3,u_2\}$，由引理 1,2 及 P_0 的取法，有

$$d(u_1v_1)+d(u_2w_3)\leqslant|V(G-V_0)|+2|E(\langle V_0\rangle)|\leqslant(p-4)+6<p+4,$$

矛盾.

情形 3.2 $N(u_1)\cap N(w_1)\neq\varnothing$ 且 $N(u_2)\cap N(w_3)\neq\varnothing$.

由引理 3(3.5)，$N(u_1)\cap N(w_2)\cap V(G-\{w_1\})=\varnothing$ 且 $N(w_2)\cap N(w_3)=\varnothing$. 设 $V_0=\{v_1,v_1,w_2,w_3\}$. 由 P_0 的取法，有

$$\begin{aligned}&d(u_1v_1)+d(w_2w_3)\\&\leqslant|V(G-(V_0\cup\{w_1,u_2\}))|+|N_{\langle V_0\rangle}(w_1)|+|N_{\langle V_0\rangle}(u_2)|+2|E(\langle V_0\rangle)|\end{aligned}$$

$$\leqslant (p-6)+2+2+4<p+4,$$

矛盾.

情形 4 $d\geqslant 5$.

由引理 2,$P_0=u_1w_1\cdots w_{t-1}u_2$ 的边至少有两条不在 G 的三角形中,所以 $P_{01}=u_1w_1\cdots w_{t-3}$ 或 $P_{02}=w_3\cdots w_{t-1}u_2$ 的边不全在 G 的三角形中. 设 P_{02} 的边 w_iw_{i+1} 不在 G 的三角形中,设 $V_0=\{u_1,v_1,w_i,w_{i+1}\}$,有

$$d(u_1v_1)+d(w_iw_{i+1})\leqslant (p-4)+6<p+4,$$

矛盾.

参 考 文 献

[1] 赵连昌、刘春峰,应用数学,1990,(1):22—26.

[2] A. Benhcine, L. Clark, N. Köhler and H. J. Veldman, J. Graph Theory, 1986, 10(3): 411—425.

[3] F. Harary and C. St. J. A. Nash-Williams, Canada Math. Bull., 1965, (8): 701—710.

[4] 赵连昌、刘春峰、王洪,应用数学学报,1986, 9(1): 17—20.

[5] L. Clark, J. Graph Theory, 1984, 8(3): 303—307.

A Result on Hamiltonian Line Graph

Liu Chunfeng
(Jinzhou Normal College, Jinzhou 121001)

Zhao Lianchang
(Dalian Oceanshipping University, Dalian 116024)

Abstract

Let G be a simple graph, for each edge $e=uv$ of graph G, let $d(e)=d(u)+d(u)$, where $d(u)$ and $d(v)$ are degree of the vertices u and v respectively. The main result is as follows:

Let G be a simple connected, almost brideless graph of order $p>q, G\not\cong K_{1,p-1}$, if $d(e_0)+d(e_1)>p+4$ for each pair of edges e_0 and e_1 such that $v(e_0)\cap v(e_1)=\emptyset$, then the line graph $L(G)$ of G has Hamiltonian cycles.

Keywords Hamiltonian line graph, D-Circuits, amost bridgeless graph.