第15卷第3期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 3
1995年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1995

关于"Sawyer 权对和 Muckenhoupt 猜想"*

李兴民
(曲阜师范大学数学系，山东 273165)

1984 年，Muckenhoupt[3] 提出了有关算子 H 的两个著名猜想：

〈Ⅰ〉 对 $1<p<\infty$，非负权对 (u,v) 使

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|Hf(x)|^p u(x)dx \leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p v(x)dx \tag{1}$$

的充分必要条件是 $(u,v)\in S_p$ 且 $(v^{1-p'},u^{1-p'})\in S_{p'}$.

〈Ⅱ〉 对 $1<p<\infty$，非负权对 (u,v) 使对 $\forall\ \lambda>0$，

$$\int_{\{x:|Hf(x)|>\lambda\}} u(x)dx \leqslant C\lambda^{-p}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p v(x)dx \tag{2}$$

的充分必要条件是 $(v^{1-p'},u^{1-p'})\in S_{p'}$.

其中 S_p 为 1982 年由 Sawyer 定义的权对：

$$(u,v)\in S_p \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|Mf(x)|^p u(x)dx \leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p v(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \forall\ \text{区间 } I\subset R: \frac{1}{|I|}\int_I [M(v^{1-p'}\chi_I)(x)]^p u(x)dx \leqslant C\int_I v(x)^{1-p'}dx < +\infty$$

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|y-x|>\varepsilon}\frac{f(y)}{x-y}dy$$

为 Hilbert 变换，

$$Mf(x) = \sup_{y\neq x}\frac{1}{y-x}\int_x^y |f(t)|dt$$

为 Hardy-Littlewood 极大算子.

χ_I 是区间 I 上的特征函数，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，$C$ 为正的常数，不同地点可能有所不同.

1990 年，丁勇在[1]，[2]中给出了关于 Sawyer 权对的一个相当深刻的结果：

定理 A 设 $1<p<\infty$，则 $(u,v)\in S_p \Leftrightarrow (v^{1-p'},u^{1-p'})\in S_{p'}$.

从而将上述猜想简化为：

(1)式成立$\Leftrightarrow$(2)式成立$\Leftrightarrow (u,v)\in S_p$. 并在[1]中通过例子

$$u(x)=\begin{cases}\frac{1}{x(-\ln x)^{5/2}} & (0,e^{-2}]\\ 0 & \text{其它}\end{cases},\quad v(x)=\begin{cases}\frac{1}{x(-\ln x)^{3/2}} & (0,e^{-2}]\\ \infty & \text{其它}\end{cases},$$

证明了虽然 $(u,v)\in S_2$ 但 $\int_{\{x:|Hf(x)|>\lambda\}}u(x)dx \leqslant \frac{C}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2 v(x)dx$ 不成立. 因此否定了

* 1992年10月5日收到.

Muckenhoupt 的上述两个猜想.

但很遗憾,[1]中定理 A 的论证是错误的,其结论也不可能成立,我们在下面将予以说明.另外,[1]中关于$(u,v)\in S_2$的证明也不充分,因其仅仅证明了对一切$I\subset R$:

$$\int_I[M(v^{-1}\chi_I)(x)]^2u(x)dx<\infty,\int_I v(x)^{-1}dx<\infty.$$

这并不能保证存在常数$C>0$,使对一切$I\subset R$,都有$\int_I[M(v^{-1}\chi_I)(x)]^2u(x)dx\leqslant C\int_I v(x)^{-}dx$.

本文尚不能断定是否$(u,v)\in S_2$,但我们却可以证明$(v^{-1},u^{-1})\overline{\in}S_2$,从而[1]中关于猜想(Ⅱ)的否定论证也是错误的.

引理 1 $M\varphi\in L^1(R^n)\Leftrightarrow\varphi=0$ a.e 于 R^n[4],[5].

引理 2 若$(u,v)\in A_1$,则$\forall\ p>1$,有$(u,v)\in S_p$([5]p393).

A_1的定义见[5].

令 $\varphi(x)=\chi_{[0,1]}$,则 $M\varphi(x)<\infty,x\in R^n$. 据引理 1 知$\int_{-\infty}^{+\infty}M\varphi(x)dx=+\infty$,因显然又有$(\varphi,M\varphi)\in A_1$,故据引理 2,对$\forall\ 1<p<\infty$,却有$(\varphi,M\varphi)\in S_p$. 但是$((M\varphi)^{1-p'},\varphi^{1-p'})\overline{\in}S_{p'}$. 即不存在常数$C>0$,使

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|Mf(x)|^{p'}(M\varphi(x))^{1-p'}dx\leqslant c\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^{p'}\varphi(x)^{1-p'}dx.$$

事实上,当$f(x)=\varphi(x)=\chi_{[0,1]}$时,上式左边$=\int_{-5}^{+\infty}M\varphi(x)dx=+\infty$,然而$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$.

此例表明:定理 A 是错误的.

[1]中关于定理 A 的论证错误在于 1773 页例数第四行中使用了如下错误的不等式:

$$\left(\int_I u(x)dx\right)^{\frac{r'}{1-r}}\leqslant\left(\int_I u(x)^r dx\right)^{\frac{r'}{r(1-r)}}\cdot\left(\int_I dx\right)^{\frac{1}{1-r}}.$$

实际上,注意到$1-p<0$,由 Hölder 不等式应成立着与此相反的不等式.

下面我们证明$(v^{-1},u^{-1})\overline{\in}S_2$.

因$u(x)$在$(0,e^{-3}]$内递减,故当$I=(a,b)\subset(0,e^{-3}]$时$M(u\chi_{(a,b)})(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x u(t)dt$,特别我们有$M(u\chi_{(0,b)})(x)=\frac{1}{x}\int_0^x u(t)dt$. 考察极限

$$\begin{aligned}\lim_{b\to0^+}\frac{\int_0^b[M(u\chi_{(0,b)})(x)]^2v(x)^{-1}dx}{\int_0^b u(x)dx}&=\lim_{b\to0^+}\frac{\int_0^b\left[\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{t(-\ln t)^{5/2}}\right]^2x(-\ln x)^{3/2}dx}{\int_0^b\frac{1}{x(-\ln x)^{5/2}}dx}\\&=\frac{2}{3}\lim_{b\to0^+}\frac{\int_0^b x^{-1}(-\ln x)^{-\frac{3}{2}}dx}{(-\ln b)^{-\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}\lim_{b\to0^+}\frac{2(-\ln b)^{-\frac{1}{2}}}{(-\ln b)^{-\frac{3}{2}}}\\&=\frac{4}{3}\lim_{b\to0^+}(-\ln b)=+\infty.\end{aligned}$$

因此,对$\forall\ C>0$,只要$(0,b)\subset(0,e^{-3}]$且b足够小,就有

$$\int_0^b[M(u\chi_{(0,b)})(x)]^2v(x)^{-1}dx>C\int_0^b u(x)dx.$$

这说明不存在常数$C>0$,使对一切$I\subset R$,都有

$$\int_I [M(u\chi_I)(x)]^2 v(x)^{-1} dx \leqslant C \int_I u(x) dx,$$

即 $(v^{-1}, u^{-1}) \overline{\in} S_2$.

于是，Muckenhoupt 猜想仍然是悬而未决的问题.

参 考 文 献

[1] 丁勇，Sawyer 权对和 Muckenhoupt 猜想，科学通报，1990，Vol. 35，No. 23，1772—1775.

[2] 丁勇，S_p 权对的分解，数学杂志，1990，Vol. 10，No. 2，139—144.

[3] B. Muckenhoupt, Lecture Notes in Math.，1043(1984)，318—321.

[4] J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, 1981.

[5] Garcia-Cuerva, J. & Rubio de Francia, J. L., *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, Amsterdam, North-Holland, 1985.