# "关于矩阵奇异值的一些不等式"一文的注记*

孙继涛 张银萍
(华东冶金学院，马鞍山 243002)

**关键词** 矩阵，奇异值，不等式.
**分类号** *AMS*(1991) 15A42/*CCL* O

文[1]中证明了下列结果

**定理** 对任意正整数 n,m,若 $A_1,A_2,\cdots,A_m\in C^{n\times n}$ 分别具有奇异值

$$\sigma_1(A_j)\geqslant\sigma_2(A_j)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A_j)\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,m,$$

则矩阵 $A=A_1A_2\cdots A_m$ 的奇异值 $\sigma_1(A)\geqslant\sigma_2(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A)\geqslant 0$ 满足

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(\prod_{j=1}^{m}A_j)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m}\sigma_i(A_j)\leqslant\{\prod_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^m(A_j)\}^{\frac{1}{m}},\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

显然，上述不等式中的第二个不等式，只要用多因子 *Hölder* 不等式即得[2]. 而第一个不等式则由下列引理即得.

**引理**[3] 若 $A_1,\cdots,A_m$ 皆为 n 阶复矩阵，则有

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(\prod_{j=1}^{m}A_j)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m}\sigma_i(A_j)\leqslant\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^m(A_j),\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

因此，文[1]中的结果实际上是矩阵论中的一个已知定理及其简单推论.

## 参 考 文 献

[1] 陈道琦，关于矩阵奇异值的一些不等式，数学年刊 11A:1(1990)，128—132.
[2] D. S. Mitrinovic，解析不等式，张小萍、王龙译，科学出版社，1987.
[3] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications.*, Academic Press, New York, 1979, 250.

* 1993年3月20日收到.