第15卷第2期 1995年5月 | 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION | Vol. 15 No. 2 May 1995

亚纯函数与其导数的唯一性定理*

邱淦俤

（宁德师专数学系，福建 352100）

摘　要　本文在涉及重值的情况下得到几个有关亚纯函数与其导数同具有共同值时的唯一性定理，推广和改进了 Rubel 和 C. C. Yang，Gundersen 及林运泳等人的一些结果.

关键词　亚纯函数，重值，唯一性.

分类号　AMS(1991) 30D35/CCL O174.52

本文采用亚纯函数的 Nevanlinna 理论的标准记号[1]，用 E 表示一个线性测度有穷的正实数集合，但它每次出现并不一定相同. $E(a,f)$ 表示 $f-a$ 的零点集合，$E_{\lambda)}(a,f)$ 表示 $f-a$ 的重级不超过 λ 的零点集合，$E_{(\lambda}(a,f)$ 表示 $f-a$ 的重级大于 λ 的零点集合，相应地用 $N_{\lambda)}(r,\frac{1}{f-a})$ 和 $N_{(\lambda}(r,\frac{1}{f-a})$ 分别表示 $f-a$ 的重级不超过 λ 和重级大于 λ 的零点的密指量. 其中每个零点均按其重数计算. 类似地可定义 $\overline{E}_{\lambda)}(a,f)$，$\overline{E}_{(\lambda}(a,f)$，$\overline{N}_{\lambda)}(r,\frac{1}{f-a})$ 及 $\overline{N}_{(\lambda}(r,\frac{1}{f-a})$. 其中每个零点均只计一次.

关于亚纯函数与其导数具有共同值时的唯一性问题，1976 年，Rubel 和 C. C. Yang 曾得到

定理 A[2]　若整函数 f 和 f' 分担(share)两个有穷值(计算重数)，则 $f\equiv f'$.

1980 年，Gundersen 证明了

定理 B[3]　若整函数 f 与 f' 分担值 $a=0$(计算重数)和 $b\neq 0,\infty$(不计重数)，则 $f\equiv f'$.

1989 年，林运泳把定理 B 改进为

定理 C[4]　若 f 满足 $\Theta(0,f)>\frac{3}{4}$ 的整函数，且对于 $a\neq 0,\infty$，$\overline{E}_{1)}(a,f)=\overline{E}_{1)}(a,f')$，则 $f\equiv f'$.

本文进一步推广和改进了上述诸结果，得到

定理 1　设 f 为非常数亚纯函数，λ 及 n 为正整数. 若对于 $a\neq 0,\infty$，$\overline{E}_{\lambda)}(a,f)=\overline{E}_{\lambda)}(a,f^{(n)})$，且 $\Theta(0,f)+\Theta(\infty,f)>1+\frac{n\lambda+1}{(n+1)\lambda+1}$，则 $f\equiv f^{(n)}$.

推论 1　设 f 为非常数整函数，λ 及 n 为正整数，若对于 $a\neq 0,\infty$，$\overline{E}_{\lambda)}(a,f)=\overline{E}_{\lambda)}(a,f^{(n)})$，且

$$\Theta(0,f)>\frac{n\lambda+1}{(n+1)\lambda+1}$$

显然，推论 1 推广并改进了定理 C 的结果.

* 1992 年 4 月 30 日收到. 94 年 3 月 26 日收到修改稿.

定理 2 设 f 为非常数亚纯函数，$\delta(\infty,f)=1$，$E(a,f)=E(a,f^{(n)})$，($a\neq 0,\infty$ 且 n 为正整数)若对于某个有穷复数 b 有 $\delta(b,f)>\frac{1}{2}$，则

(i) 当 $b=a$ 时，$f\equiv f^{(n)}$.

(ii) 当 $b\neq a$ 时，$f^{(n)}(f-b)=a(a-b)$，或者 $\frac{f^{(n)}}{a}=\frac{f-b}{a-b}$.

推论 2 设 f 为非常数亚纯函数，$\delta(\infty,f)=1$，$E(a,f)=E(a,f^{(n)})$，($a\neq 0,\infty$；n 为正整数)若 $\delta(0,f)>\frac{1}{2}$，则 $f\cdot f^{(n)}=a^2$.

上述定理的证明主要基于以下几个引理

引理 1[5] 设 $f_j(j=1,2,3)$ 为亚纯函数，至少有一个不为常数，且 $\sum_{j=1}^{3}f_j\equiv 1$. 如果

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{3}N(r,f_j)=o\{T(r)\},\\ \sum_{j=1}^{3}N(r,\frac{1}{f_j})<(\lambda+o(1))T(r),\end{cases}\qquad (r\notin E)$$

其中 $T(r)=\max_{1\leq j\leq 3}\{T(r,f_j)\}$，$\lambda<1$. 则 $f_j(j=1,2,3)$ 中必有一个恒等于 1.

引理 2 设 f 为亚纯函数，$a_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为 m 个互相判别的有穷非零复数，λ 为正整数. 若 $f\not\equiv f^{(n)}$，且 $\overline{E}_{\lambda)}(a_i,f)=\overline{E}_{\lambda)}(a_i,f^{(n)})$，$(i=1,2,\cdots,m)$. 则

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{N}_{\lambda)}(r,\frac{1}{f-a_i})\leqslant n[N(r,f)+\overline{N}(r,\frac{1}{f})]+o\{T(r,f)\}.\ (r\notin E)$$

引理 3[1] 设 f 为亚纯函数，n 为非负整数，$\delta(\infty,f)=1$，则

$$T(r,f^{(n)})\leqslant(1+o(1))T(r,f)\quad (r\notin E).$$

引理 4 设 f 为亚纯函数，n 为正整数，则对于任意有穷复数 a 均有

$$N(r,\frac{1}{f^{(n)}})\leqslant T(r,f^{(n)})-T(r,f)+N(r,\frac{1}{f-a})+o\{T(r,f)\}\quad (r\notin E).$$

参 考 文 献

[1] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Oxford, 1964.

[2] L. A. Rubel and C. C. Yang, *Complex Analysis*, Kentucky, 1976(Proc. Conf.), 101—103.

[3] G. G. Gundersen, J. London Math. Soc., 20(1979), 457—466.

[4] 林运泳，亚纯函数及其导数取得共同值的两个定理，纯粹数学与应用数学，1(1989)，16—23.

[5] 仪洪勋、杨重骏，导数具有相同值点的亚纯函数的唯一性定理，数学学报，34:5(1991)，675—680.