第15卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 15 No. 3
1995年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1995

关于环的变换性条件的若干注记*

戴 跃 进
(福建师范大学数学系，福州 350007)

关键词　字，半素环，J-半单环，次直和.
分类号　AMS(1991) 16U80/CCL O153.3

本文运用下列熟知的引理证明了某些环的变换性定理并推广了 H. E. Bell[4] 中若干结果.

引理 1 (Herstein)　设 R 是一个环，若对任意 $a\in R$，存在整系数多项式 $\varphi_a(x)$ 使得

$$a-a^2\varphi_a(a)\in Z(R),$$

则 R 是交换环.

引理 2 (Awtar)　设 R 是一个质环，$0\neq a\in R$. 若 $x\in R$ 使 $ax\in Z(R)$，则 $x\in Z(R)$.

引理 3 (Levitzki)　设 L 是环 R 的非零的诣零单边理想，若 L 具有有界的诣零指数，则 R 含有一个非零的幂零理想.

引理 4　设 I 是半素环 R 的一个理想. 若 R/I 与 I 均为交换环，则 R 也是交换环.

称环 R 满足条件(A_1)，若对任意 $a,b\in R$，存在字长 >2 且含有 x^2 的字 $f_X(x,y)$ 及整系数多项式 $\varphi_X(x,y)$ 使得 $ab-f_X(a,b)\cdot\varphi_X(a,b)\in Z(R)$，其中 f_X 与 φ_X 均可随 $X=(a,b)$ 而变.

依引理 1，易证下列命题：

命题 1　每一个满足条件(A_1)的有单位元的环都是交换环.

命题 2　令 J 为环的 Jacobson 根. 那么，每一个满足条件(A_1)的 J-半单环都是交换环.

定理 1　设 R 是一个半素环. 若 R 满足条件(A_1)，则 R 是交换环.

证明　由于半素环是质环的次直和，且条件(A_1)在环的同态映射之下是可传递的. 故可设 R 是一个满足条件(A_1)的质环. 这样，可以证明，R 不含非零的幂零元.

现令 $J(R)$ 为环 R 的 Jacobson 根，$0\neq a\in J(R)$. 则依条件(A_1)，存在字 $f_a(x,y)$ 及多项式 $\varphi_a(x,y)$ 使得 $\lambda=a^2-a^m\varphi(a)\in Z(R)$，其中 $a^m=f_a(a,a)$，$\varphi(a)=\varphi_a(a,a)$，$m(>2)$是 f_a 的字长. 若 $\lambda=0$，则 $a^2=0$，这与 R 不含非零的幂零元相矛盾，故 $\lambda\neq 0$. 于是，依条件(A_1)，又存在字 $f_X(x,y)$ 及多项式 $\varphi_X(x,y)$ 使得 $\lambda a-\lambda^k a^l\varphi_X(\lambda,a)\in Z(R)$，其中 $\lambda^k a^l=f_X(\lambda,a)$，$k+l(>2)$是 f_X 的字长且 $k\geqslant 2$. 故依引理 2 可得 $a-a^2\psi(a)\in Z(R)$，其中 $a^2\psi(a)=(a^2-a^m\varphi(a))^{k-1}a^l\varphi_X(a^2-a^m\varphi(a),a)\in Z[a]$. 因此，依引理 1，$J(R)$是交换环.

注意到 $R/J(R)$是满足条件(A_1)的 J-半单环. 故依命题 2，$R/J(R)$是交换环. 进而，由引理 4 知，R 是交换环.

令 $B(R)$为环 R 的 Baer 下诣零根，则 $B(R)$是 R 的一个局部幂零理想且 $R/B(R)$为半素环.

* 1992年6月17日收到. 94年3月26日收到修改稿. 福建省自然科学基金资助.

这样，依定理 1 可以证明

推论 1 设环 R 满足条件(A_1). 那么，

(i) R 的换位子理想 $C(R)$是局部幂零的；

(ii) R 中所有幂零元作成 R 的一局部幂零理想；

(iii) R 中任一幂零元的 2 次幂均在 $Z(R)$中.

注记 1 令 $f_X(x,y)=yx^2, \varphi_X(x,y)=p(x)$，则推论 1 中(i)和(ii)便导出[4]的定理 1.

称环 R 满足条件(A_2)，若对任意 $a,b\in R$，存在字长>2 且含有 y^2 的字 $g_X(x,y)$及整系数多项式 $\psi_X(x,y)$使得 $ab-g_X(x,y)\psi_X(a,b)\in Z(R)$，其中 g_X 与 ψ_X 均可随 $X=(a,b)$而变.

类似于定理 1 的证明，我们有

定理 2 每一个满足条件(A_2)的半素环都是交换环.

称环 R 满足条件(B_1)(或(B_2))，若对任意 $a,b\in R$，存在自然数 $m=m(a,b)>1, n=n(a,b)>1$ 及整系数多项式 $\varphi_X(x,y)$ 使得 $ab=a^mb^n\varphi_X(a,b)$ (或 $ab=b^ma^n\varphi_X(a,b)$)，其中 m,n 与 φ_X 均可随 $X=(a,b)$而变.

注意到，每一个满足条件(B_i)的环必满足条件(A_i) $(i=1,2)$，故依定理 1 和定理 2，可以证明：

定理 3 每一个满足条件(B_i)的环都是交换环$(i=1,2)$.

注记 2 定理 3 可视为 Bell[4] 中定理 3 在某种意义上的推广，即 $m=m(a,b)$是可变的.

参 考 文 献

[1] I. N. Herstein, *The structure of a certain class of rings*, Amer. J. Math., 75(1953), 864—871.

[2] R. Awtar, *A remark on the commutativity of certain rings*, Proc. Amer. Math. Soc., 41(1973), 370—372.

[3] A. A. Klein, *A new proof of a result of Levitzki*, Proc. Amer. Math. Soc., 81(1981), 8.

[4] H. E. Bell, *Some commutativity results for rings with two-variable contraints*, Proc. Amer. Math. Soc., 53 (1975), 280—284.

[5] 邱琦章，结合环的若干交换性条件，数学杂志，4, No. 1(1984), 31—38.

[6] 戴跃进，Köthe 半单纯环的几个交换性定理，数学杂志，11, No. 3(1991), 331—334.