第 16 卷第 3 期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 3
1996 年 8 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1996

极小子流形上 Laplace 算子的谱*

瞿成勤 欧阳崇珍
(南京海军电子工程学院数学教研室, 211800) (南昌大学数学系, 330047)

摘 要 本文讨论了 $S^{n+p}(1)$ (或 CP^{n+1}) 中极小子流形上 Laplace 算子的谱, 证明了 $S^{n+p}(1)$ 中全测地极小子流形(或 CP^{n+1} 中 Kachler 超曲面) 是由作用在 q-形式上的 Laplace 算子的谱唯一确定

关键词 极小子流形, Laplace 算子, 谱, 全测地子流形
分类号 AMS(1991) 53C42/CCL O186.16

§1 引 言

设 (M, g) 是 n 维紧致定向 Riemann 流形, 记 $\Lambda^q(M)$ 为 M 上的 q- 形式所成的向量空间, 此处 $q = 0, 1, \cdots, n$. 以 $\mathrm{Spec}^q(M, g)$ 表示 Laplace 算子 Δ 作用在 $\Lambda^q(M)$ 上的谱集 那么等谱的两个 Riemann 流形是否等距? 一般情况下这个问题是没有肯定回答的, 第一个例子是 Milnor[1] 给出的两个等谱但不等距的 16 维平环 但对特殊的 Riemann 流形, 如 n 维球(或 n 维复射影空间), 在某些条件下可由其上的 Laplace 算子的谱唯一确定 设 g_0 表示单位球面 $S^n(1)$ (或复射空间 CP^n) 的标准度量, 若 $\mathrm{Spec}^q(M, g) = \mathrm{Spec}^q(S^n(1), g_0)$, 当下述情形之一成立时, M 等距于 $S^n(1)$:

(i)[2] $q = 0, n = 1, 2, 3, 4, 5$;

(ii)[3] $q = 1, n = 2, 3, 16, \cdots, 93$;

(iii)[4] $q = 2, n = 2, 3, 6, 7, 14, 17, 18, \cdots, 178$;

(iv)[5] $q = 2$, n 为奇数, 且 M 为正规切触 Riemann 流形

设 (M, g) 是复 n 维紧致 Kaehler 流形, $\mathrm{Spec}^q(M, g) = \mathrm{Spec}^q(CP^n, g_0)$, 若满足下列情形之一, 则 (M, g) 全纯等距于 CP^n:

(v)[2] $q = 0, n = 1, 2, \cdots, 6$;

(vi)[3] $q = 1, n = 8, 9, \cdots, 51$;

(vii)[6] $q = 2$,

(viii)[7] $q^2 - 2nq + n(2n-1)/3 \neq 0, q \neq 1$ 或 $(2n-1)$, $(n = 1, \cdots, 7)$, 且 (M, g) 为上同调 Einstein 的 Kaehler 流形

H. Hasegawa[8] 在 $q = 0$ 时讨论了 $S^{n+p}(1)$ 中极小子流形 (CP^{n+1} 中 Kaehler 子流形上

* 1993 年 11 月 20 日收到 江西省自然科学基金资助

Laplace 算子谱, 对一般非负整数 q, [9] 研究了 $S^{n+1}(1)$ 中极小超曲面上的Laplace 算子谱.

本文讨论了$S^{n+p}(1)$ 中极小子流形(CP^{n+1} 中Kaehler超曲面) 上Laplace 算子的谱, 证明了下述定理, 从而拓扩了他们的结论.

定理 1 设(M, g) 是 $S^{n+p}(1)$ 的紧致极小子流形, 若对于某个 q, $\mathrm{Spec}^q(M, g) = \mathrm{Spec}^q(S^n(1), g_0)$, 且 $n \le 24$ 时, $(n, q) \ne (6, 1)$ 和$(6, 5)$; $n \ge 25$ 时, $p \le \frac{2}{5}n - 4 + \frac{12}{5n}$; 则$M$ 是全测地的.

注 定理1中$n \le 24$时对p 没有限制, $n \ge 25$时, $p = 1$显然适合, 因此包含了[10]的结果.

其次, 讨论复射影空间CP^{n+1} 中紧致Kaehler 超曲面上Laplace 算子谱, 证明了

定理 2 除了$(n, q) = (3, 1), (3, 5)$ 两种情况外, 若(M, g) 是CP^{n+1} 中紧致Kaehler 超曲面, 且对某个 q, $\mathrm{Spec}^q(M, g) = \mathrm{Spec}^q(CP^n, g_0)$, 则$M$ 是全测地的, 从而全纯等距于CP^n.

定理 3 设(M, g) 是CP^{n+1} 中紧致Kaehler 超曲面, $n \ge 7$, 若对于某个q, $\mathrm{Spec}^q(M, g) = \mathrm{Spec}^q(Q^n, g_0)$, Q^n 是CP^{n+1} 中复二次超曲面, g_0 为诱导度量, 且$f_1(n, q) \ne 0$, $f_2(n, q) \ge 0$, 则M 全纯等距于Q^n. 其中

$$f_1(n, q) = n(2n-1) - 3q(2n-q),$$

$$f_2(n, q) = 45q(2n-q)[(n-1)(2n-3) - 2(q-1)(2n-q-1)] - n(n-1)(2n-1)(2n-3).$$

令 $q = 1, 2$, 则定理3推出

推论 1 设 (M, g) 是CP^{n+1}的紧Kaehler超曲面, $7 \le n \le 45$; 若$\mathrm{Spec}^1(M, g) = \mathrm{Spec}^1(Q^n, g_0)$, 则$M$ 全纯等距于Q^n.

推论 2 设(M, g) 是CP^{n+1}的紧Kaehler超曲面, $7 \le n \le 87$; 若$\mathrm{Spec}^2(M, g) = \mathrm{Spec}^2(Q^n, g_0)$, 则$M$ 全纯等距于Q^n.

§2 预备知识

设(M, g) 是m 维紧致定向Riemann 流形, $\Lambda^q(M)$ 为M 上外 q 形式所成的向量空间, $\Delta = -(dd^* + d^*d)$ 表示M 上Laplace算子, 这里d 是外微分算子, d^* 是它的共轭算子, 对于$q = 0, 1, 2, \cdots, m$, 有Δ 的谱

$$\mathrm{Spec}^q(M, g) = \{0 \ge \lambda_{1,q} \ge \lambda_{2,q} \ge \cdots \downarrow -\infty\}.$$

关于这些特征值, 有Minakshisundaram-Pleijel-Gaffney 渐近公式

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{\lambda_{i,q}t} = (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{N} (a_{k,q}t^k) + O(t^{N-\frac{m}{2}+1}), \quad t \downarrow 0. \tag{2.1}$$

系数 $a_{k,q}$, $k = 0, 1, 2$, 由下式给出[10]

$$a_{0,q} = \binom{m}{q} V, \quad V = \mathrm{Vol}(M), \tag{2.2}$$

$$a_{1,q} = \left[\frac{1}{6}\binom{m}{q} - \binom{m-2}{q-1}\right] \int_M \rho * 1, \tag{2.3}$$

$$a_{2,q} = \int_M (C_1(m, q)\rho^2 + C_2(m, q)\|S\|^2 + C_3(m, q)\|R\|^2) * 1, \tag{2.4}$$

这里 $\|R\|^2$, $\|S\|^2$ 分别是曲率张量 R 和 Ricci 张量 S 的模长平方, ρ 是纯量曲率, 系数 $C_1(m, q)$, $C_2(m, q)$, $C_3(m, q)$ 由下式给出

$$C_1(m, q) = \frac{1}{72}\binom{m}{q} - \frac{1}{6}\binom{m-2}{q-1} + \frac{1}{2}\binom{m-4}{q-2}, \tag{2.5}$$

$$C_2(m, q) = -\frac{1}{180}\binom{m}{q} + \frac{1}{2}\binom{m-2}{q-1} - 2\binom{m-4}{q-2}, \tag{2.6}$$

$$C_3(m, q) = \frac{1}{180}\binom{m}{q} - \frac{1}{12}\binom{m-2}{q-1} + \frac{1}{2}\binom{m-4}{q-2}. \tag{2.7}$$

组合数 $\binom{r}{s}$ 在 r 或 s 小于 0 时理解为 0.

设 CP^{n+1} 是复 $n+1$ 维具有 Fubini-Study 度量的复射影空间, 全纯截面曲率为 1. 设 $z_0, z_1, \cdots, z_{n+1}$ 是 CP^{n+1} 中齐次坐标系, 复二次超曲面 $Q^n = \{(z_0, z_1, \cdots, z_{n+1}) \in CP^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n+1} z_i^2 = 0\}$, 则 Q^n 全纯等距于 Hermite 对称空间 $SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$, 当 $n > 2$ 时, 关于诱导的 Kaehler 结构, Q^n 是紧 Einstein 流形[11], [12], 且

(a) $$S = \frac{n}{2}g, \tag{2.8}$$

(b) $$\rho = n^2. \tag{2.9}$$

设 (M, g) 是 $S^{n+p}(1)$ 中极小子流形, 在局部正交标架下有

$$R_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum_{\alpha}(h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}), \tag{2.10}$$

$$R_{ij} = (n-1)\delta_{ij} - \sum_{\alpha, k} h_{ik}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}, \tag{2.11}$$

$$\rho = n(n-1) - \|\sigma\|^2. \tag{2.12}$$

这里 R_{ijkl} 和 R_{ij} 分别是 R 和 S 的分量, $\|\sigma\|^2$ 表示第二基本形式 σ 的模长平方, $\sum$ 表示对重复指标求和, 约定指标取值范围为 $i, j, k, l = 1, 2, \cdots, n$, $\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, p$.

设 (M, g) 是 CP^{n+1} 的 Kaehler 超曲面, σ 是 M 的第二基本形式, J 是复结构, 则

$$\sigma(X, JY) = J\sigma(X, Y) = \sigma(JX, Y), \tag{2.13}$$

$$R(X, JY) = JR(X, Y), R(JX, JY) = R(X, Y), \tag{2.14}$$

$$S(JX, JY) = S(X, Y). \tag{2.15}$$

设 $e_1, \cdots, e_n, e_{1^*} = Je_1, \cdots, e_{n^*} = Je_n, e_{\tilde{1}}, e_{\tilde{1}^*} = Je_{\tilde{1}}$ 是 CP^{n+1} 上局部标准正交基, 使得限制在 M 上有 $e_1, \cdots, e_n, e_{1^*}, \cdots, e_{n^*}$ 切于 M, 对于 M 上任意三个切向量场 X, Y, Z, 有

$$JA_{\tilde{1}}X = -A_{\tilde{1}}JX = A_{\tilde{1}^*}X, \tag{2.16}$$

其中 $A_{\tilde{1}}X = A_{e_{\tilde{1}}}X$, $A_{\tilde{1}^*}X = A_{e_{\tilde{1}^*}}X$ 是 Weingarten 变换,

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y + \langle JY, Z\rangle JX - \langle JX, Z\rangle JY + 2\langle X, JY\rangle JZ] + A_{\sigma(Y, Z)}X - A_{\sigma(X, Z)}Y, \tag{2.17}$$

$$S(X, Y) = \frac{n+1}{2}\langle X, Y\rangle - 2\langle A_{\tilde{1}}X, A_{\tilde{1}}Y\rangle, \tag{2.18}$$

$$\rho = n(n+1) - \|\sigma\|^2. \tag{2.19}$$

§3　定理的证明

分两种情况来证明定理 1

(i)　当 $\frac{1}{6}\binom{n}{q} \neq \binom{n-2}{q-1}$ 时，对于 $S^n(1)$，$\rho \not\equiv n(n-1)$，由 $a_{1,q}=a'_{1,q}$，(2.3) 和 (2.12)，知 M 是全测地的

(ii)　当 $\frac{1}{6}\binom{n}{q} = \binom{n-2}{q-1}$ 时，$n \leq 24$ 时，只有 $(n,q)=(6,1)$ 和 $(6,5)$，已被排除。下面考虑 $n \geq 25$ 的情况，此时必有 $q \geq 5$.

首先计算 $\|R\|^2$，$\|S\|^2$. 由 (2.10)，(2.11) 得

$$\|R\|^2 = 2n(n-1) - 4\|\sigma\|^2 + 2\sum h_{ik}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}h_{jl}^{\alpha}h_{jl}^{\beta} - 2\sum h_{il}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}h_{jk}^{\alpha}h_{jl}^{\beta}, \tag{3.1}$$

$$\|S\|^2 = n(n-1) - 2(n-1)\|\sigma\|^2 + \sum h_{ik}^{\alpha}h_{il}^{\beta}h_{jk}^{\alpha}h_{jl}^{\beta}. \tag{3.2}$$

记 $a_{\alpha\beta} = \sum h_{ik}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}$，则 $A=(a_{\alpha\beta})$ 是 p 阶对称矩阵. 记 $N(A) = \mathrm{trace}A \cdot {}^tA = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}^2$，其中 ${}^tA$ 表示 A 的转置. 显然，对任一 p 阶正交矩阵 Q，均有 $N(A)=N(Q^{-1}AQ)$，因此 $\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}^2$ 与基 $e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}$ 的选取无关. 由 A 的对称性知，可选取一组标准正交基 $e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}$，使 $(a_{\alpha\beta})$ 成对角形. 记 $a_{\alpha}=a_{\alpha\alpha}$，则 $\|\sigma\|^2 = \sum_{\alpha} a_{\alpha}$，此时

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}^2 = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^2 \geq \frac{1}{p}\left(\sum_{\alpha} a_{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{p}\|\sigma\|^4. \tag{3.3}$$

固定 α, β，记 $b_{kl} = \sum_{i} h_{ik}^{\alpha}h_{il}^{\beta}$，$B=(b_{kl})$，则 $\sum_{i,j,k,l} h_{jk}^{\alpha}h_{jl}^{\beta}h_{il}^{\alpha}h_{ik}^{\beta} = \sum b_{kl}b_{lk} = \mathrm{trace}B^2$，对任一 n 阶正交矩阵 Q，有 $\mathrm{trace}B^2 = \mathrm{trace}(Q^{-1}B^2Q)$，故 $\sum_{i,j,k,l} h_{jk}^{\alpha}h_{jl}^{\beta}h_{il}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}$ 与标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$ 的选取无关. 由于 (h_{ij}^{α}) 是对称矩阵，对于固定的 α，可选一组标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，使 (h_{ij}^{α}) 成对角形，即 $h_{ij}^{\alpha} = \lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}$，此时

$$\sum_{i,j,k,l} h_{jk}^{\alpha}h_{jl}^{\beta}h_{il}^{\alpha}h_{ik}^{\beta} = \sum_{i,j,k,l} \lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{\alpha}\delta_{il}\delta_{jk}h_{jl}^{\beta}h_{ik}^{\beta} = \sum_{i,j} \lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{\alpha}(h_{ij}^{\alpha})^2. \tag{3.4}$$

记

$$T_1 = \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,l} h_{jk}^{\alpha}h_{jl}^{\beta}h_{il}^{\alpha}h_{ik}^{\beta} = \sum_{\alpha,\beta,i,j} \lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{\alpha}(h_{ij}^{\beta})^2. \tag{3.5}$$

同理，对于任意固定的 α, β，$\sum_{i,j,k,l} h_{ik}^{\alpha}h_{il}^{\beta}h_{jk}^{\alpha}h_{jl}^{\beta}$ 与基 $e_1, \cdots, e_n$ 选取无关. 对于上面选取的 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，记 $T_2 = \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,l} h_{ik}^{\alpha}h_{il}^{\beta}h_{jk}^{\alpha}h_{jl}^{\beta}$，则

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{\alpha,\beta,i,j} (\lambda_i^{\alpha})^2(h_{ij}^{\beta})^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,i,j}[(\lambda_i^{\alpha})^2 + (\lambda_j^{\alpha})^2](h_{ij}^{\beta})^2 \\ &\geq \sum_{\alpha,\beta,i,j} \lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{\alpha}(h_{ij}^{\beta})^2 = T_1, \text{且 } T_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3,6}$$

因为 $\frac{1}{6}\binom{n}{q} = \binom{n-2}{q-1}$，且 $n \geq 25$,

$$C_3 = \frac{n^2-10n+6}{5(n-1)(n-6)}\binom{n-4}{q-2} > 0, \tag{3.7}$$

$$C_2 - 2C_3 = \frac{2n^2+20n+12}{5(n-1)(n-6)}\binom{n-4}{q-2} > 0, \tag{3.8}$$

$$-2n(n-1)C_1 - 2(n-1)C_2 - 4C_3 = \frac{2(n-3)(n^2-4)}{5(n-1)(n-6)}\binom{n-4}{q-2} > 0, \tag{3.9}$$

$$C_1 + \frac{2}{p}C_3 = \frac{-5pn+2n^2-20n+12}{5p(n-1)(n-6)}\binom{n-4}{q-2}. \tag{3.10}$$

当 $p \le \frac{2}{5}n-4+\frac{12}{5n}$时, 也有

$$C_1 + \frac{2}{p}C_3 > 0. \tag{3.11}$$

这里 C_1, C_2, C_3 分别是 $C_1(n,q), C_2(n,q), C_3(n,q)$ 的简写. 由(3.3)—(3.11)得

$$\begin{aligned} a_{2,q} &= \int_M [C_1\rho^2 + C_2\|S\|^2 + C_3\|R\|^2] {}^*1 \\ &\ge \int_M \{[C_1 n^2(n-1)^2 + C_2 n(n-1)^2 + 2C_3 n(n-1)] + \left(C_1 + \frac{2}{p}C_3\right)\|\sigma\|^4 \\ &\quad + (C_2 - 2C_3)T_2 + [-2n(n-1)C_1 - 2(n-1)C_2 - 4C_3]\|\sigma\|^2\} {}^*1. \end{aligned} \tag{3.12}$$

对于 $S^n(1)$, $\rho' = n(n-1)$, $\|S'\|^2 = n(n-1)^2$, $\|R'\|^2 = 2n(n-1)$. 由 $a_{2,q} = a'_{2,q}$ 及 $\mathrm{Vol}(M) = \mathrm{Vol}(S^n(1))$ 得

$$\begin{aligned} &\int_M \{\left(C_1 + \frac{2}{p}C_3\right)\|\sigma\|^4 + (C_2 - 2C_3)T_2 \\ &\quad + [-2n(n-1)C_1 - 2(n-1)C_2 - 4C_3]\|\sigma\|^2\} {}^*1 \le 0. \end{aligned}$$

再一次利用(3.7)-(3.11)得 $\|\sigma\|^2 = 0$, 故M 是全测地的, 从而定理 1 得证.

定理 2 的证明　设M 是CP^{n+1}中 Kaehler 超曲面, 由[12], 可选取一组标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n, e_{1^*} = Je_1, \cdots, e_{n^*} = Je_n, e_{\tilde{1}}, e_{\tilde{1}^*} = Je_{\tilde{1}}$; $e_1, e_2, \cdots, e_n, e_{1^*}, \cdots, e_{n^*}$ 切于M, $e_{\tilde{1}}, e_{\tilde{1}^*}$ 是其法向量, 使得第二基本形式的矩阵有形

$$A_T = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ \hline & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -\lambda_n \end{array}\right). \tag{3.13}$$

约定 $i, j, k = 1, 2, \cdots n$, 经计算得

$$\|R\|^2 = 4\sum \langle R(e_i,e_j)e_k, R(e_i,e_j)e_k\rangle + 4\langle R(e_i,Je_j)e_k, R(e_i,Je_j)e_k\rangle. \tag{3.14}$$

由(2.17)得

$$R(e_i,e_j)e_k = \frac{1}{4}(\delta_{jk}e_i - \delta_{ik}e_j) + A_{\sigma(e_j,e_k)}e_i - A_{\sigma(e_i,e_k)}e_j. \tag{3.15}$$

由(3.13)得

$$\sigma(e_j, e_k) = \lambda_j \delta_{jk} \tilde{e_1}, \sigma(e_i, e_k) = \lambda_i \delta_{ik} \tilde{e_1}, \tag{3.16}$$

因此

$$R(e_i, e_j)e_k = \frac{1}{4}(\delta_{jk}e_i - \delta_{ik}e_j) + \lambda_j\delta_{jk}A_{\tilde{1}}e_i - \lambda_i\delta_{ik}A_{\tilde{1}}e_j. \tag{3.17}$$

同理得

$$R(e_i, Je_j)e_k = -\frac{1}{4}(\delta_{ik}Je_j + \delta_{jk}Je_i + 2\delta_{ij}Je_k) + \lambda_j\delta_{jk}A_{\tilde{1}^*}e_i - \lambda_i\delta_{ik}A_{\tilde{1}}e_{j^*}. \tag{3.18}$$

于是由(3.14), (3.17), (3.18)得

$$\|R\|^2 = 2n(n+1) + 16(\sum_i \lambda_i^2)^2 - 16(\sum_i \lambda_i^2). \tag{3.19}$$

另外由(2.18)得

$$R_{ij} = \frac{1}{2}(n+1)\delta_{ij} - 2\lambda_i\lambda_j\delta_{ij}, \tag{3.20}$$

$$R_{ij^*} = 0. \tag{3.21}$$

因此

$$\|S\|^2 = \frac{1}{2}n(n+1)^2 + 8\sum_i \lambda_i^4 - 4(n+1)\sum_i \lambda_i^2, \tag{3.22}$$

$$\rho = n(n+1) - 4\sum_i \lambda_i^2. \tag{3.23}$$

由(3.19), (3.22), (3.23)得(以下C_i是$C_i(2n, q)$的简写, $i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} a_{2,q} &= \int_M (C_1\rho^2 + C_2\|S\|^2 + C_3\|R\|^2) {}^* 1 \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)[2C_3 + (n+1)C_2 + 2n(n+1)C_1]\mathrm{Vol}(M) \\ &\quad - 4[4C_3 + (n+1)C_2 + 2n(n+1)C_1]\int_M (\sum \lambda_i^2) {}^* 1 \\ &\quad + 16(C_1 + C_3)\int_M (\sum \lambda_i^2)^2 {}^* 1 + 8C_2\int_M (\sum \lambda_i^4) {}^* 1. \end{aligned} \tag{3.24}$$

当$\frac{1}{6}\binom{2n}{q} \neq \binom{2n-2}{q-1}$时, 由$a_{1,q} = a'_{1,q}$得

$$\int_M \rho {}^* 1 = \int_{CP^n} \rho' {}^* 1.$$

对CP^n而言, $\rho' = n(n+1)$, 于是$\int_M (\sum \lambda_i^2) {}^* 1 = 0$, 从而$\lambda_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 故$M$是$CP^{n+1}$的全测地 Kaehler 超曲面

当$\frac{1}{6}\binom{2n}{q} = \binom{2n-2}{q-1}$时, 通过计算得

$$C_2 = \frac{2(2n^2+3)}{15(n-1)(2n-3)}\binom{2n-2}{q-1}, \tag{3.25}$$

$$C_1 + C_3 = \left(\frac{1}{30} - \frac{2n-1}{(2n-2)(2n-3)}\right)\binom{2n-2}{q-1}, \tag{3.26}$$

$$-4C_3 - (n+1)C_2 - 2n(n+1)C_1 = \left(\frac{n^2-8n+21}{15(2n-3)} + \frac{1}{5}\right)\binom{2n-2}{1-q}. \tag{3.27}$$

上述各式在 $n \geq 17$ 时均大于 0.

对 CP^n 而言

$$\| R' \|^2 = n(n+1), \tag{3.28}$$

$$\| S' \|^2 = \frac{1}{2} n(n+1)^2, \tag{3.29}$$

$$\rho'^2 = n^2(n+1)^2, \tag{3.30}$$

由 $a_{2,q} = a'_{2,q}$ 及(3.24), (3.28)—(3.30)得

$$- 4[4C_3 + (n+1)C_2 + 2n(n+1)C_1] \int_M \left(\sum \lambda_i^2\right) * 1 + 16(C_1 + C_3) \int_M \left(\sum \lambda_i^2\right)^2 * 1 + 8C_2 \int_M \left(\sum \lambda_i^4\right) * 1 = 0.$$

再由(3.25)—(3.27)得 $\lambda_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 于是 M 是 CP^{n+1} 的全测地 Kaehler 超曲面.

在 $n < 17$ 时, 满足 $\frac{1}{6}\binom{2n}{q} = \binom{2n-2}{q-1}$ 的非负整数解只有 $(n, q) = (3, 1)$ 和 $(3, 5)$, 已被排除.

综上所述, 除 $(n, q) = (3, 1), (3, 5)$ 外, M 是 CP^{n+1} 的全测地 Kaehler 超曲面. 从而 M 全纯等距于 CP^n.

定理 3 的证明 为证明定理 3, 首先给出下面引理.

引理[13] 设 M 是 CP^{n+1} 中紧致 Kaehler 超曲面, 且 M 的数量曲率为常数, 则 M 是 CP^n 或 Q^n.

由于 Q^n 是 CP^{n+1} 中 Einstein 的 Kaehler 超曲面, $S = \frac{n}{2} g$, 因此, 由[12], 可选取适当的标准正交基 $e_1, \cdots, e_n, Je_1, \cdots, Je_n$, 使得

$$\tilde{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ \hline & & & -\frac{1}{2} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -\frac{1}{2} \end{array}\right),$$

于是

$$\sum \lambda_i^2 = \frac{1}{4} n, \tag{3.31}$$

$$\left(\sum \lambda_i^2\right)^2 = \frac{1}{16} n^2, \tag{3.32}$$

$$\sum \lambda_i^4 = \frac{1}{16} n. \tag{3.33}$$

由(3.24), (3.31)—(3.33)得

$$a'_{2,q} = \int_M \left\{ \frac{1}{2} n(n+1)[2C_3 + (n+1)C_2 + 2n(n+1)C_1] \right.$$

$$-n[4C_3+(n+1)C_2+2n(n+1)C_1]+n^2(C_1+C_3)+\frac{1}{2}nC_2\}*1. \tag{3.34}$$

由 $f_1(n,q)\neq 0$ 及 $a_{1,q}=a'_{1,q}$ 得

$$4\int_M(\sum\lambda_i^2)*1=n\mathrm{Vol}(M). \tag{3.35}$$

由 $a_{2,q}=a'_{2,q}$ 及(3.24), (3.34), (3.35)得

$$16n(C_1+C_3)\int_M(\sum\lambda_i^2)^2*1+8nC_2\int_M(\sum\lambda_i^4)*1$$
$$=n^3(C_1+C_3+\frac{1}{2n}C_2)\mathrm{Vol}(M). \tag{3.36}$$

由于 $n\sum\lambda_i^4\geq(\sum\lambda_i^2)^2$, 当 $f_2(n,q)\geq 0$ 时

$$16n(C_1+C_3)\int_M(\sum\lambda_i^2)^2*1+8nC_2\int_M(\sum\lambda_i^4)*1$$
$$\geq 16n(C_1+C_3+\frac{1}{2n}C_2)\int_M(\sum\lambda_i^2)^2*1, \tag{3.37}$$

因此

$$n^2(C_1+C_3+\frac{1}{2n}C_2)\mathrm{Vol}(M)\geq 16(C_1+C_3+\frac{1}{2n}C_2)\int_M(\sum\lambda_i^2)^2*1. \tag{3.38}$$

当 $n\geq 7$ 时, $C_1+C_3+\frac{1}{2n}C_2>0$, 由(3.38)得

$$16\int_M(\sum\lambda_i^2)^2*1\leq n^2\mathrm{Vol}(M). \tag{3.39}$$

由(3.35)及 Schwarz 不等式, 有

$$16\int_M(\sum\lambda_i^2)^2*1\geq n^2\mathrm{Vol}(M). \tag{3.40}$$

由(3.39), (3.40)得

$$\sum\lambda_i^2=\frac{1}{4}n. \tag{3.41}$$

由(2.19), (3.41)得

$$\rho=n^2.$$

根据引理知 M 全纯等距于 Q^n.

注　由定理 1 的证明看到, 只要 (n,q) 不是 $\frac{1}{6}\binom{n}{q}=\binom{n-2}{q-1}$ 的解, M 必是全测地的. 特别地, 有

推论 3　设 (M,g) 是 $S^{n+p}(1)$ 的紧致极小子流形, 若对于 $q=0,2,3,4$ 之一时, $\mathrm{Spec}^q(M,g)=\mathrm{Spec}^q(S^n(1),g_0)$, 则 M 是全测地的.

参　考　文　献

[1] J. Milnor, *Eigenvalues of the Laplace operator of certain manifold*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 51(1964), 542.

[2] S. Tanno, *Eigenvalues of the Laplacican of Riemannian manifolds*, Tohoku Math. J., 25(1973),

391- 403.

[3] S. Tanno, *The spectrum of the Laplacian for 1-forms*, Proc. AMS, 45(1974), 125- 129.

[4] Gr. Tsagas & C. Kockinos, *The geometry and the Laplace operator on the exterior 2-forms on a compact Riemannian manifolds*, Proc. AMS, 73(1979), 109- 116.

[5] S. I Goldberg & H. Gauchman, *Characterizing S^m by the spectrum of the Laplacian on 2-forms*, Proc. AMS, 99(1987), 750- 756.

[6] B. Y. Chen & L. Vanhecke, *The spectrum of the Laplacian of Kaehler manifolds*, Proc. AMS, 79 (1980), 82- 86.

[7] H. Gauchman & S. I Goldberg, *Spectral rigidity of compact Kaehler and contact manifolds*, Tohoku Math. J., 38(1986), 563- 573.

[8] T. Hasegawa, *Spectral geometry of closed minimal submanifolds in a space form, real or complex*, Kodai Math. J., 3(1980), 224- 252.

[9] **陆志勤, 陈志华, 极小超曲面上Laplace算子谱, 数学进展**, 21(1992), 359- 363.

[10] V. K. Patodi, *Curvature and the fundamental solution of the heat operator*, J. Indian Math. Soc., 34(1970), 269- 285.

[11] B. Smyth, *Differential geometry of complex hypersurfaces*, Ann. of Math., 85(1967), 246- 266.

[12] K. Ogiue, *Differential geometry of Kaehler submanifolds*, Adv. in Math., 13(1974), 74- 114.

[13] S. Kobayashi, *Hypersurfaces of complex projective space with constant scalar curvature*, J. Diff. Geom., 1(1967), 369- 370.

On the Spectrum of the Laplacian Operators on Minimal Submanifolds

Qu Chengqin
(Naval Electronic Engineering college, Nanjing 211800)

Ouyang Chongzhen
(Nanchang University, Nanchang 330047)

Abstract

In the present paper we discuss the spectrum of Laplacian on minimal submanifolds of $S^{n+p}(1)$ or CP^{n+1}, and prove that the totally geodesic minimal submanifold of $S^{n+p}(1)$ and the Kaehler hypersurface of CP^{n+1} have been uniquely characterized by spectrum of q-forms of the Laplacian on them.

Keywords minimal submanifold, Laplacian operators, spectrum, totally geodesic