第16卷第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 16 No. 3
1996年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1995

Sasakian 流形中反不变极小子流形的稳定性*

许志才　　李海中
(淮南矿业学院基础部，安徽 232001)　(清华大学应用数学系，北京 100084)

摘　要　本文给出了 Sasakian 流形中反不变极小子流形是稳定或不稳定的一个充分条件.

关键词　Sasakian 流形，反不变极小子流形，子流形的稳定性，Ricci 曲率
分类号　AMS(1991) 53C40/CCL O186.16

一　主要结果

子流形稳定性的研究是微分几何中的一个重要课题. 本文获得如下定理.

定理　设 M^{n+1} 是 Sasakian 流形 M^{2n+1} 中闭、反不变极小子流形，且 M^{2n+1} 的结构向量场 ξ 切于 M^{n+1}，则有

(1)　如果 M^{2n+1} 的 Ricci 曲率大于 -2，且 $H^1(M^{n+1},R)\neq 0$，则 M^{n+1} 不稳定. 这里 $H^1(M^{n+1},R)$ 是 M^{n+1} 的以实数域 R 为系数域的一阶同调群.

(2)　如果 M^{2n+1} 的 Ricci 曲率不大于 -2，则 M^{n+1} 是稳定的.

二　预备知识

设 $(M^{2n+1},\Phi,\xi,\eta,g)$ 为 $(2n+1)$ 维 Sasakian 流形，其中 Φ 为 M^{2n+1} 上 $(1,1)$ 型张量场，ξ 为 M^{2n+1} 的结构向量场，η 为 ξ 的对偶 1—形式. 则有如下性质(见 Yano-kon[1]中第五章)

$$\Phi\xi=0,\quad \eta(\xi)=1; \tag{1}$$

$$\Phi^2X=-X+\eta(X)\xi \tag{2}$$

$$g(\Phi X,Y)+g(X,\Phi Y)=0,\quad g(\Phi X,\Phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y); \tag{3}$$

$$(\bar\nabla_X\Phi)Y=g(X,Y)\xi-\eta(Y)X; \tag{4}$$

$$\bar\nabla_Y\xi=-\Phi Y; \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\bar R(\Phi X,\Phi Y,\Phi Z,\Phi W)=&\bar R(X,Y,Z,W)-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)-\eta(X)\eta(W)g(Y,Z)\\&+\eta(Y)\eta(W)g(X,Y)+\eta(X)\eta(Z)g(Y,W),\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $X,Y,Z,W\in TM^{2n+1}$，g 为 M^{2n+1} 的 Riemann 度量，$\bar\nabla$ 为关于 g 的共变微分算子，$\bar R(X,Y,$

* 1992年5月26日收到. 煤炭部青年科研基金资助课题

Z, W)为M^{2n+1}的Riemann曲率张度

现在，设M^{n+1}为M^{2n+1}中$(n+1)$维子流形，且M^{n+1}切于M^{2n+1}的结构向量场ξ，如果对任意$X\in M^{n+1}$，都有$\Phi T_X(M^{n+1})\subset T_X^{\perp}M$成立，则称$M^{n+1}$为$M^{2n+1}$的反不变(anti-invariant)子流形

对M^{n+1}上任何法向量场$u\in T^{\perp}M^{n+1}$，由u诱导的第二变分公式为[2]

$$V''(u)=\int_{M^{n+1}}\left[\|DU\|^2-\sum_{i=0}^{n}\overline{R}(u,e_i,e_i,u)-\|Au\|^2\right]*1, \tag{7}$$

其中$e_0, e_1, \cdots, e_n$为TM^{n+1}的标准正交基，$*1$为体积元 如对任意的$u\in T^{\perp}M^{n+1}$，有$V''(u)\geq 0$，则称M^{n+1}为M^{2n+1}中稳定 如对某一$u\in T^{\perp}M^{n+1}$有$V''(u)<0$，则称M^{n+1}在M^{2n+1}中不稳定

三 定理的证明

设M^{n+1}为Sasakian流形M^{2n+1}中闭、反不变极小子流形，且M^{n+1}切于M^{2n+1}的结构向量场ξ在M^{2n+1}中选取局部正交标架场$e_0=\xi, e_1, \cdots, e_n, e_{1^*}=\Phi e_1, \cdots, e_{n^*}=\Phi e_n$，使得限制到$M^{n+1}$上时，$e_0, e_1, \cdots, e_n$切于$M^{n+1}$. 并设$w^0=\eta, w^1, \cdots, w^n; w^{1^*}, \cdots, w^{n^*}$为其对偶标架场 对于$M^{n+1}$上任何法向量场$u\in T^{\perp}M^{n+1}$，令$X=-\Phi u\in TM^{n+1}$有$\Phi X=u$(由(1)—(3)). 利用Gauss公式和Weingarten公式，并且(4)得到:

$$-A_uY+D_Yu=\Phi(\nabla_YX)+\Phi\eta(Y,X)+g(Y,X)\xi-\eta(X)Y.$$

比较上式两边切部和法部有

$$D_Yu=\Phi\nabla_YX, \quad -A_uY=\Phi\eta(Y,X)+g(X,Y)\xi \tag{8}$$

由(3)得

$$\|DU\|^2=\|\nabla X\|^2-\sum_{i=0}^{n}(g(\xi,\nabla_{e_i}X))^2,$$

但从(5)知$\nabla_{e_i}\xi=0$，又$g(X,\xi)=0$，可见$g(\nabla_{e_i}X,\xi)=-g(X,\nabla_{e_i}\xi)=0$，故有

$$\|DU\|^2=\|\nabla X\|^2. \tag{9}$$

在(6)中令$X=e_i, Y=\Phi X, Z=\Phi X, W=e_i$有

$$\overline{R}(\Phi e_i,\Phi^2X,\Phi^2X,\Phi e_i)=\overline{R}(e_i,\Phi X,\Phi X,e_i)-\eta(e_i)\eta(e_i)g(\Phi X,\Phi X). \tag{10}$$

再利用$\Phi^2X=-X$和Gauss方程得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\overline{R}(e_i,u,u,e_i)&=\sum_{i=0}^{n}\overline{R}(e_i,\Phi X,\Phi X,e_i)=\sum_{i=0}^{n}\overline{R}(\Phi e_i,X,X,\Phi e_i)+g(\Phi X,\Phi X)\\&=\overline{S}(X,X)-\sum_{i=0}^{n}\overline{R}(e_i,X,X,e_i)+g(\Phi X,\Phi X)\\&=\overline{S}(X,X)-S(X,X)-\sum_{i=0}^{n}\|h(e_i,X)\|^2+g(\Phi X,\Phi X),\end{aligned} \tag{11}$$

其中最后一个等号利用了M^{n+1}的极小性

由(5)有$h(X,\xi)=-\Phi X$，故$\|h(X,\xi)\|^2=g(\Phi X,\Phi X)$，将此式代入(11)得

$$\sum_{i=0}^{n}\overline{R}(e_i,u,u,e_i)=\overline{S}(X,X)-S(X,X)-\sum_{i=1}^{n}\|h(e_i,X)\|^2. \tag{12}$$

用(8)的第二个等式和$h(X,\xi)=-\Phi X$，易验证下式

$$\| A u \| = \sum_{i=1}^{n} \| h(e_i, X) \|^2 + 2g(X, X). \quad (13)$$

现在, 将(9), (12)和(13)代入(7)有

$$V''(u) = \int_{M^{n+1}} [\| \nabla X \|^2 - \bar{S}(X, X) + S(X, X) - 2g(X, X)] * 1. \quad (14)$$

设$W = \nabla_X X - (\mathrm{div} X) \cdot X$, 又设$w$ 是相伴于X 的1-形式 那么直接计算得到(见Yano-Kon[1]P45. (4. 4)式)

$$0 = \int_{M^{n+1}} (\mathrm{div} W) * 1 = \int_{M^{n+1}} [S(X, X) + \| \nabla X \|^2 - \frac{1}{2} \| dW \|^2 - (\delta W)^2] * 1. \quad (15)$$

结合(14)和(15)得到

$$V''(u) = \int_{M^{n+1}} [\frac{1}{2} \| dW \|^2 + (\delta W)^2 - (\bar{S}(X, X) + 2g(X, X))] * 1. \quad (16)$$

从(16)式可得:

(1) 如果M^{2n+1}的Ricci曲率大于-2, 且$H^1(M^{n+1}, R) \neq 0$, 则存在M^{n+1}上调和1-形式β 因此$d\beta = \delta\beta = 0$, 设$u = \Phi Y$, 其中Y 是相伴于β的M^{n+1}上向量场 由(16)知, 对这个法向量场u, 有$V''(u) < 0$, 因此M^{n+1}不稳定

(2) 如果M^{2n+1}的Ricci曲率不大于-2, 即$S(X, X) \leq -2(X, X)$, 于是(16)式表明: 对M^{n+1}上任何法向量场u, 有$V''(u) \geq 0$, 故M^{n+1}稳定

参 考 文 献

[1] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*, Series in Pure Math., Vol. 3, World Scientific, 1984.

[2] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math., 88(1968), 62-105.

The Stability of Anti-Invariant Minimal Submanifolds in Sasakian Manifold

Xu Zhicai

(Basic Courses Centre, Huainan Mining Institute, Anhui 232001)

Li Haizhong

(Dept. of Appl. Math., Tsing Hua University, Beijing 100084)

Abstract

In this paper, we prove the following

Theorem Let M^{n+1} be a closed anti-invariant minimal submanifold tangent to the structure vector field of Sasakian manifold M^{2n+1}, then

(1) If Ricci curvature of M^{2n+1} is greated than -2 and $H^1(M^{n+1}, R) \neq 0$, then M^{n+1} is unstable.

(2) If Ricci curvature of M^{2n+1} is not greater that -2, then M^{n+1} is stable.

Keywords Sasakian manifold, anti-invariant minimal submanifold, stability of submanifold, Ricci curvature.