局部凸空间上锥映象拓扑度的计算*

梁 方 豪
(山东大学数学系, 济南 250100)

摘 要 本文给出了局部凸空间上锥映象拓扑度计算的一个结果, 并举例说明了它的应用.

关键词 局部凸空间, 锥映象, 拓扑度
分类号 AMS(1991) 47H10/CCL O177.2

本文恒设 X 是 Hausdorff 局部凸实线性拓扑空间(简称局部凸空间). 在文献[1]中, 设 K 是 X 中闭凸集, D 是 X 中开集, $T:\overline{D}\to K$ 是连续映象且 $T(\overline{D}\cap K)$ 的闭包是紧集, 又设 $\theta\notin(I-T)(\partial D\cap K)$ (I 为恒等映象), 在此情况下[1]定义了拓扑度 $\deg_K(I-T,D,\theta)$, 并对其证明了正规性、可加性、紧同伦不变性以及 $\deg_K$ 非零时算子方程有解性等性质. 显然把[1]中的"$T:\overline{D}\to K$ 连续"改为"$T:\overline{D}\cap K\to K$ 连续"不会给 $\deg_K$ 的建立及性质带来任何影响. 就拓扑度的计算而言, [1]只给出了拓扑度为 1 及奇数的结果.

以下恒设 P 是 X 中的锥. 本文对于锥映象 $T:\overline{D}\cap P\to P$ 给出了拓扑度为 0 的某些条件, 并且进而根据拓扑度的可加性导出了锥映象的不动点定理. 本文的结果是文献[2]的推广, 但[2]的方法不能得出本文的结果.

定理 1 设 D 是 X 中开集, $\overline{D}\cap P$ 有界. 又设 $T:\overline{D}\cap P\to P$ 是全连续映象(即 $T:\overline{D}\cap P\to P$ 连续且 $T(\overline{D}\cap P)$ 的闭包是紧集). 若下面的条件(d_0)成立:

$$(d_0)\quad\begin{cases}\text{存在全连续映象 } S:\overline{D}\cap P\to P,\ \text{使 } \theta\notin\overline{S(\partial D\cap P)},\ \text{且使}\\ x-Tx\neq tSx,\quad \forall x\in\partial D\cap P,\ t\geq 0,\end{cases}\tag{1}$$

则 $\deg_P(I-T,D,\theta)=0$.

证明 记 $E=\overline{D}\cap P$, $\partial_P E=\partial D\cap P$. 设 $N(\theta)$ 是 θ 的平衡凸邻域的全体.

第一步 由 $\theta\notin\overline{S(\partial_P E)}$ 知存在 $U\in N(\theta)$ 使

$$\overline{S(\partial_P(E)}\subset \complement U,\tag{2}$$

$\complement U$ 表示 U 对 X 的余集. 由 $\overline{T(E)}$ 紧知其有界, 再由 E 有界知 $(I-T)(E)$ 有界, 故存在 $t_0>0$ 使

$$(I-T)(E)\subset\frac{1}{2}t_0U.\tag{3}$$

令

$$F=\{x-Tx-tSx\,|\,x\in\partial_P E,\ t\in[0,t_0]\}.\tag{4}$$

* 1993年2月24日收到 96年4月7日收到修改稿

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

下证 F 是闭集: 设 F 中的网 $\{w_n = x_n - Tx_n - t_n S x_n\}$ 收敛于 X 中的 w 点. 由 $T(\partial_P E)$ 的闭包紧知网 $\{Tx_n\}$ 有子网 $Tx_{n_i} \to y$, 又由 $S(\partial_P E)$ 的闭包紧知网 $\{Sx_{n_i}\}$ 有子网收敛于某点 z, 不妨记此子网为 $\{Sx_m\}$. 由 $[0, t_0]$ 是 R^1 中紧集知网 $\{t_m\}$ 有子网 $t_{m_j} \to t$ 且 $t \in [0, t_0]$, 于是 $Tx_{m_j} + t_{m_j} S x_{m_j} \to y + tz$. 再由 $w_{m_j} \to w$ 可知 $x_{m_j} \to w + y + tz = x$. 由 $\partial_P E$ 闭知 $x \in \partial_P E$, 由 T 与 S 在 $\partial_P E$ 上连续知 $w_{m_j} \to x - Tx - tSx$, 所以 $w = x - Tx - tSx \in F$. F 闭得证. 由(1)知 $\theta \notin F$, 故存在 $V \in N(\theta)$ 使

$$F \subset \complement(t_0 V). \tag{5}$$

显然可取 $p \in (\frac{1}{2}U) \cap V \cap P$ 使 $p \neq \theta$. 令 R 是映 E 成 p 的映象. 由(2)知 $(S + R)(\partial_P E) = S(\partial_P E) + p \subset \complement U + \frac{1}{2}U$. 相应于平衡凸开集 U 的 Minkowski 泛函是 X 上的半范数, 利用此半范数容易证明 $\complement U + \frac{1}{2}U \subset \complement(\frac{1}{2}U)$, 所以

$$(S + R)(\partial_P E) \subset \complement(\frac{1}{2}U). \tag{6}$$

令 $H(x, t) = (T + tS + tR)x$. 当 $x \in \partial_P E$ 且 $t > t_0$ 时, 由(6)知 $(tS + tR)x \in t\complement(\frac{1}{2}U) = \complement(\frac{1}{2}tU) \subset \complement(\frac{1}{2}t_0 U)$, 从而由(3)知 $x - H(x, t) \neq \theta$. 当 $x \in \partial_P E$ 且 $0 \leq t \leq t_0$ 时, 由 $p \in V$ 知 $tRx = tp \in tV \subset t_0 V$, 从而由(4)、(5)知 $x - H(x, t) \neq \theta$. 总之

$$x - H(x, t) \neq \theta, \quad \forall x \in \partial_P E,\ t \geq 0. \tag{7}$$

设 $\tau > 0$. 由 T、S、R 都是 $E \to P$ 的全连续映象并且 $[0, \tau]$ 是 R^1 中紧集, 利用网收敛容易证明 $H: E \times [0, \tau] \to P$ 是全连续映象. 注意到(7), 由文献[1]定理4($\deg_K$ 的紧同伦不变性)便得

$$\deg_P(I - T, D, \theta) = \deg_P(I - T - \tau S - \tau R, D, \theta). \tag{8}$$

第二步 显然 $(S + R)(E) = S(E) + p \subset P + p$, 由 $p \in P$ 及 $p \neq \theta$ 知 $\theta \notin P + p$, 所以存在 $W \in N(\theta)$ 使

$$(S + R)(E) \subset \complement W. \tag{9}$$

由 $(I - T)(E)$ 有界知存在 $t_1 > 0$ 使 $(I - T)(E) \subset t_1 W$, 又由(9)知 $(t_1 S + t_1 R)(E) \subset \complement(t_1 W)$, 所以对 $\forall x \in E$ 有 $(I - T - t_1 S - t_1 R)x \neq \theta$, 于是由[1]定理1($\deg_K$ 非零时算子方程有解性)得 $\deg_P(I - T - t_1 S - t_1 R, D, \theta) = 0$. 再由第一步的(8)式(取 $\tau = t_1$)即知

$$\deg_P(I - T, D, \theta) = 0.$$

注 定理1中的条件(d_0)有如下常用的两个特例:

(d_0') 存在 $p \in P$, $p \neq \theta$, 使当 $x \in \partial D \cap P$ 且 $t \geq 0$ 时有 $x - Tx \neq tp$;

(d_0'') $\theta \notin \overline{T(\partial D \cap P)}$ 并且当 $x \in \partial D \cap P$ 及 $t \geq 1$ 时有 $x \neq tTx$.

定理2 设 D_1 与 D_2 都是 X 中开集, $\theta \in D_1 \subset \overline{D}_1 \subset D_2$, $\overline{D}_2 \cap P$ 有界. 又设 $T: \overline{D}_2 \cap P \to P$ 全连续. 如果当 $i = 1$ 或者 $i = 2$ 时, 对于 D_i 条件(d_1)成立:

(d_1) $$x \neq tTx, \ \forall x \in \partial D_i \cap P,\ t \in [0, 1],$$

同时对于 D_{3-i} 条件(d_0)成立(或(d_0'), (d_0'')之一成立), 那么 T 在 $(D_2 - \overline{D}_1) \cap P$ 中有不动点.

证明 由条件(d_1)可知 $\deg_P(I - T, D_i, \theta) = 1$(证法与 Banach 空间的情况无异); 再根据定理1及 $\deg_P$ 的可加性立即知定理2成立.

当积分区域无界时, 非线性积分算子在赋范数的函数空间上往往不是全连续的, 这就使得

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

拓扑度等工具不能使用. 如果在函数空间上不是引入范数而是引入距离使之成为拓扑较弱的局部凸空间, 则积分算子在其上就可能全连续了. 下面的定理 3 就是按此途径根据定理 2 得证的, 它作为一个例子说明了定理 1 的使用意义.

定理 3 对于非线性 Hammerstein 积分方程

$$\mathbf{C}(x) = \int_{\infty}^{\infty} k(x,y) f(y, \mathbf{C}(y))\, dy \equiv (T\mathbf{C})(x), \tag{10}$$

设 $k(x,y)$ 在 $R^1 \times R^1$ 上非负连续, $f(x,u)$ 在 $R^1 \times [0, +\infty)$ 上非负连续, 且当 $t > 0$ 时 $f(x, u)$ 在 $R^1 \times [0, t]$ 上有界. 又设: (i) 对于 $k(x,y)$, 存在正测度有界闭集 $F \subset R^1$ 及正数 $\alpha \leq 1$, 使得对 $\forall x \in F, y \in R^1, z \in R^1$ 有 $k(x,y) \geq \alpha k(z,y)$; 又存在 $x_0 \in F$ 及 $\beta > 0$ 使 $k(x_0, y)$ 在 R^1 上可积且当 $y \in F$ 时 $k(x_0, y) \geq \beta$; (ii) $f(x,u)$ 满足超线性条件: $\lim\limits_{u \to 0^+} (f(x,u)/u) = 0$ 对于 $x \in R^1$ 一致成立, 并且 $\lim\limits_{u \to +\infty} (f(x,u)/u) = +\infty$ 对于 $x \in F$ 一致成立; 或者 $f(x,u)$ 满足次线性条件: $\lim\limits_{u \to 0^+} (f(x,u)/u) = +\infty$ 对于 $x \in F$ 一致成立, 并且 $\lim\limits_{u \to +\infty} (f(x,u)/u) = 0$ 对于 $x \in R^1$ 一致成立, 则方程(10) 存在不恒等于零的非负连续函数解.

参 考 文 献

[1] D. M. Duc, D. N. Thanh, D. D. Ang, *Relative topological degree of set-valued compact vector fields and its applications*, J. Math. Anal. Appl., 80(1981), 406- 432.

[2] 郭大钧, 关于锥映象的几个不动点定理, 科学通报, 20(1983), 1217- 1219.

[3] 郭大钧, 多项式型 Hammerstein 积分方程的正解及其应用, 数学年刊, 4:A (1983), 645- 656.

The Computation of Topological Degree for Cone Maps in a Locally Convex Space

Liang Fanghao

(Dept. of Math., Shandong University, Jinan)

Abstract

We give a result of topological degree computation of cone maps in a locally convex space, and show its application by a example.

Keywords locally convex space, cone map, topological degree.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.