第16卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 3
1996年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1996

圆周上单调映射的拓扑熵*

何连法　　王在洪
(河北师范大学数学系, 石家庄 050016)

摘　要　本文研究了圆周上单调映射的拓扑熵, 得到了圆周上连续单调映射 f 的拓扑熵 $h(f) = \log|\deg(f)|$.

关键词　拓扑熵, 生成集

分类号　AMS(1991) 28D20, 54H20/CCL O174.12, O189.11

众所周知, 拓扑熵是动力系统的重要内容, 有关拓扑熵的研究已有很多成果, [1]和[2]分别给出了圆周上同胚和扩张映射的拓扑熵. 综观这两类映射的共性是它们都具有单调性, 那么一个自然的问题是: 圆周上单调映射的拓扑熵为何呢? 本文研究了这个问题.

定义　设 (X, d) 是度量空间, $f: X \to X$ 是一致连续映射, $n \in N$, $\epsilon > 0$, K 是 X 的子集, F 是 X (K) 的子集, 如果对任意 $x \in K$, 存在点 $y \in F$, 使得 $\max\{d(f^i(x), f^i(y)): 0 \le i \le n-1\} \le \epsilon$, 则称集 F 为对 f (n, ϵ) 生成 K 的, 称 F 为 K 的 (n, ϵ) 生成集(生成子集).

当 K 紧致时, 分别用 $r_n(\epsilon, K)$ 和 $O_n(\epsilon, K)$ 表示 K 的 (n, ϵ) 生成集(生成子集) 中基数最小者的基数, 那么有 $r_n(\epsilon, K) < +\infty$, $o_n(\epsilon, K) < +\infty$.

记 $\overline{r_f}(\epsilon, K) = \lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{n}\log r_n(\epsilon, K)$, $h(f, K) = \lim_{\epsilon\to 0}\overline{r_f}(\epsilon, K)$. $h(f) = \sup\{h(f, K) | K \subset X, K$ 是紧致子集$\}$.

若 X 是紧致度量空间, 则 $h(f) = h(f, X)$.

引理 1[3]　设 $f: S^1 \to S^1$ 是连续满映射, $|\deg(f)| \ge 2$, 则 $h(f) \ge \log|\deg(f)|$.

引理 2　设 (X, d) 是紧度量空间, A, B 是 X 的闭子集, 且 $X = A \cup B$, $f: X \to X$ 是一致连续映射, 则 $r_n(\epsilon, X) \le O_n(\epsilon, A) + O_n(\epsilon, B)$.

证明由定义直接可得.

引理 3　设 $f: S^1 \to S^1$ 是严格递增的连续映射, 且 $m = \deg f \ge 2$, 则对任意 $n \ge 0$, 存在 m^n 个互不相同的闭弧 $I_{s_1\cdots s_n}$ $(1 \le s_\alpha \le m, 1 \le \alpha \le n)$ 使得 $f^n(I_{s_1\cdots s_n}) = S^1$, 且有 $\bigcup_{1\le s_1\cdots s_m \le m} I_{s_1\cdots s_n} = S^1$.

证明　由于 $m = \deg(f) \ge 2$, 故 f 存在不动点 $P \in S^1$, 不妨设 $\pi(0) = P$ (这里 $\pi: R^1 \to S^1$, $\pi(x) = e^{2\pi i x}$).

选择 f 的适当提升 F 使得 $F(0) = 0$, 由于 f 是严格递增的, 即 F 是严格递增的, 由 $\deg(f) = F(1) = m$ 可知, 在 $[0, 1]$ 中存在点 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = 1$ 使 $J_i = [x_{i-1}, x_i]$,

* 1994年1月13日收到. 国家自然科学基金资助课题.

$i=1,2,\cdots,m$, $F(J_i)=[i-1,i]$. 记 $I_i=\pi(J_i)$, 则 $f(I_i)=f\circ\pi(J_i)=\pi\circ F(J_i)=\pi[i-1,i]=S^1$.

由于 $f(I_i)=S^1$, $I_i\subset S^1(i=1,2,\cdots,m)$, 且 f 是严格单调的, 故存在 m 个闭弧段 $I_{ij}(j=1,2,\cdots,m)$ 使得 $I_{ij}\subset I_i$, $f(I_{ij})=I_j$, $f^2(I_{ij})=S^1(1\le i,j\le m)$, 并且 $\mathrm{Int}(I_{ij})\cap\mathrm{Int}(I_{kl})=\varnothing(i\ne k$ 或 $j\ne l)$, $\bigcup_{j=1}^{m}I_{ij}=I_i$. 因而 $n=2$ 时有结论成立.

归纳地证明: 对任意 $n\in N$, 存在 m^n 个闭区间 $I_{s_1\cdots s_n}(1\le s_\alpha\le m,1\le\alpha\le n)$ 满足 $f^n(I_{s_1\cdots s_n})=S^1$, 且有 $\mathrm{Int}(I_{s_1\cdots s_n})\cap\mathrm{Int}(I_{s_1'\cdots s_n'})=\varnothing$(存在某个 $i\in\{1,\cdots,m\}$ 使 $s_i\ne s_i'$), 且 $\bigcup_{1\le s_1\cdots s_n\le m}I_{s_1\cdots s_n}=S^1$.

引理 4 设 f 满足引理 3 中的条件, 则对任意自然数 n 及充分小正数 ϵ, $O_n(\epsilon,I_{s_1\cdots s_n})\le nM$ (这里 $M=[\epsilon^{-1}]+1$).

证明 设 $\epsilon<\min\{L(I_1),\cdots,L(I_m)\}$(其中 $L(I_i)$ 表示 I_i 两端点所夹弧长). 下面用数学归纳法证明:

显然 $O_1(\epsilon,I_{s_1\cdots s_n})\le M$.

假设 $O_k(\epsilon,I_{s_1\cdots s_n}\le kM$. 用 F 表示基数为 $O_k(\epsilon,I_{s_1\cdots s_n})$ 的 $I_{s_1\cdots s_n}$ 的 (k,ϵ) 生成子集. 考虑 f^kF 及 $f^k(I_{s_1\cdots s_n})$, 在弧段 $f^k(I_{s_1\cdots s_n})$ 上加若干点, 使得新加点与 f^kF 中的点一起把 $f^k(I_{s_1\cdots s_n})$ 划分成弧长小于 ϵ 的一个个小弧段. 显然至多加 M 个点即可. 设新加点点集为 A. 记 $F^1=F\cup(f^{-k}(A)\cap I_{s_1\cdots s_n})$, 下面证明 F^1 是 $I_{s_1\cdots s_n}$ 的 $(k+1,\epsilon)$ 生成子集.

对任意 $x\in I_{s_1\cdots s_n}$, 存在 $y\in F$ 使得 $d(f^i(x),f^i(y))\le\epsilon$, $0\le i\le k-1$. 若 $d(f^k(x),f^k(y))\le\epsilon$, 则不用再证. 若 $d(f^k(x),f^k(y))>\epsilon$, 记 $f^{(k-1)}(x)$ 和 $f^{(k-1)}(y)$ 所夹劣弧段 I, 则有 $I\subset f^{(k-1)}(I_{s_1\cdots s_n})$. 这因为, 若 $I\not\subset f^{(k-1)}(I_{s_1\cdots s_n})$, 由 $I_{s_1\cdots s_n}$ 的构造过程可知存在 $I_{t_1t_2\cdots t_{n-k+1}}$ 及 I_i 使得 $f^{(k-1)}(I_{s_1\cdots s_n})=I_{t_1t_2\cdots t_{n-k+1}}\subset I_i$, 从而存在 $I_j(i\ne j)$, $\mathrm{Int}(I_i)\cap\mathrm{Int}(I_j)=\varnothing$, $I_j\subset I$, 由 ϵ 的选取知 I 的两端点间的弧长大于 ϵ, 但 $d(f^{(k-1)}(x),f^{(k-1)}(y))\le\epsilon$, 矛盾. 故有 $I\subset f^{(k-1)}(I_{s_1\cdots s_n})$.

记 $J_0=f(I)$, 在 J_0 中取点 W, $W=f^k(z)$, $z\in f^{-k}(A)\cap I_{s_1\cdots s_n}$ 使得 $d(f^k(x),f^k(z))\le\epsilon$, 显然

$$d(f^{(k-1)}(x),f^{(k-1)}(z))\le\epsilon$$

不妨记 $J_1=[f^{(k-1)}(x),f^{(k-1)}(y)]\subset f^{(k-1)}(I_{s_1\cdots s_n})$. 由于 $f:f^{(k-2)}(I_{s_1\cdots s_n})\to f^{(k-1)}(I_{s_1\cdots s_n})(2\le k\le n)$ 是同胚, J_1 是闭弧段, 故在 $f^{(k-2)}(I_{s_1\cdots s_n})$ 中存在闭弧段 J_2 使得 $f(J_2)=J_1$. 显然 $J_2=[f^{(k-2)}(x),f^{(k-2)}(y)]$ 或 $J_2=[f^{(k-2)}(y),f^{(k-2)}(x)]$, 不妨取前一种情形, 由于 $f^{(k-1)}(z)\in J_1$, 故 $f^{(k-2)}(z)\in J_2$, 又因为 $d(f^{(k-2)}(x),f^{(k-2)}(y))\le\epsilon$, 所以

$$d(f^{(k-2)}(x),f^{(k-2)}(z))\le\epsilon$$

同理可证对任意 i 有

$$d(f^i(x),f^i(y))\le\epsilon(0\le i\le k).$$

所以 F^1 是 $I_{s_1\cdots s_n}$ 对 f 的 $(k+1,\epsilon)$ 生成子集. 因而有

$$O_{(k+1)}(\epsilon,I_{s_1\cdots s_n})\le(k+1)M.$$

故 $O_n(\epsilon,I_{s_1\cdots s_n})\le nM$.

命题1 设 $f: S^1 \to S^1$ 是严格单调的连续映射, 则 f 的拓扑熵 $h(f) = \log|\deg(f)|$.

证明 当 $|\deg(f)| = 1$ 时, f 是同胚, $h(f) = 0$.

当 $|\deg(f)| \geq 2$ 时, 注意到 $\deg(f^2) = (\deg(f))^2$ 且 $h(f^2) = 2h(f)$, 只须对 $\deg(f) = m \geq 2$ 证明即可.

取 $\epsilon > 0$ 适合引理4, 对任意 $n \in N$, 存在 m^n 个闭弧段 $I_{s_1\cdots s_n}$ 使得 $f^n(I_{s_1\cdots s_n}) = S^1 (1 \leq s_\alpha \leq m, 1 \leq \alpha \leq n)$ 且 $\bigcup_{1\leq s_1\cdots s_n\leq m} I_{s_1\cdots s_n} = S^1$. 由引理4知 $O_n(\epsilon, I_{s_1\cdots s_n}) \leq nM$. 又由引理2知

$$r_n(\epsilon, S^1) \leq \sum_{1\leq s_1\cdots s_n\leq m} O_n(\epsilon, T_{s_1\cdots s_n}),$$

从而 $r_n(\epsilon, S^1) \leq nMm^n$, $\overline{r_f}(\epsilon, S^1) = \lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{n}\log r_n(\epsilon, S^1)$, $\overline{r_f}(\epsilon, S^1) \leq \log m$, 因此

$$h(f, S^1) \leq \log m, h(f) \leq \log m.$$

最后, 结合引理1得到: $h(f) = \log m$, 即 $h(f) = \log|\deg(f)|$.

命题2 设 $f: S^1 \to S^1$ 是单调但非严格单调的, 则 $h(f) = \log|\deg(f)|$.

为了证明命题2, 先证两个引理

引理5 设 $f: S^1 \to S^1$ 是单调的连续映射, $\deg(f) = 1$, 若 $pp(f) \neq \varnothing$ ($pp(f)$ 是 f 的周期点集), 则 f 的周期点均具有相同的周期

证明 分两种情况

1) $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$, 显然 $\mathrm{Fix}(f)$ 是闭集 若 $\mathrm{Fix}(f) = S^1$, 则显然结论成立 若 $\mathrm{Fix}(f) \neq S^1$, 设 (α, β) 是 $S^1 \setminus \mathrm{Fix}(f)$ 的任意一个余区间, 因 $\alpha, \beta \in \mathrm{Fix}(f)$ 且 f 是单调的, 故有

$$f((\alpha, \beta)) = (\alpha, \beta).$$

对于任意 $x \in (\alpha, \beta)$, 有 $f(x) > x$ 或 $f(x) < x$, 不妨设 $f(x) > x$. 于是点列 $\{f^n(x)\}$ 是单调递增且是有界的, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \beta$, 故 (α, β) 中的点均为游荡点, 由此得到 $S^1 \setminus \mathrm{Fix}(f)$ 中不包含任何周期点, 故有 $pp(f) = \mathrm{Fix}(f)$.

2) $\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$, 设 $n = \min\{k \mid f^k(x) = x, x \in pp(f)\}$. 由1) 可知 f^n 没有周期大于或等于2的周期点 设 $x \in pp(f)$ 且 m 是 x 的周期, 现证 $m = n$. 否则若 $m > n$, 由于 $f^m(x) = x$, 故 $(f^n)^m(x) = x$, 于是存在整数 k 使得 $(f^n)^k(x) = x$, $2 \leq k \leq m$, $(f^n)^i(x) \neq x$, $1 \leq i \leq k-1$. 即 x 是 f^n 的周期大于1的周期点, 矛盾 故 f 的任意周期点具有相同的周期

引理6 条件如引理5, 则存在同胚 $g: S^1 \to S^1$ 及正整数 n 使 $\mathrm{Fix}(f^n) = \Omega(f^n) = \Omega(g) = \mathrm{Fix}(g)$ (这里 $\Omega(\bullet)$ 是 $(\bullet)$ 的非游荡点集).

证明 由引理5知 f 的周期点有相同的周期 n. 对任意 $x \in \mathrm{Fix}(f^n)$, 定义 $g(x) = x$. 在 $S^1 \setminus \mathrm{Fix}(f^n)$ 的任意一个余区间 (α, β) 上, 因为对任意 $x \in (\alpha, \beta)$, 有 $f^n(x) > x$ 或 $f^n(x) < x$. 现在 (α, β) 上如下定义 g: $(\alpha, \beta) \to (\alpha, \beta)$ 使得 g 满足: 当 $f^n(x) > x$ 时有 $g(x) > x$, 而当 $f^n(x) < x$ 时有 $g(x) < x$, 于是容易得到满足结论的同胚 g.

命题2的证明 因 $\deg(f^n) = (\deg(f))^n$ 及 $h(f^n) = nh(f)$, 故只对 $\deg(f) \geq 1$ 证明即可, 分情形证明如下:

1) $\deg(f) = 1$, 若 $pp(f) = \varnothing$, 由[4]知 $h(f) = 0$. 若 $pp(f) \neq \varnothing$, 由引理6知存在同胚 $g: S^1 \to S^1$ 使得 $\mathrm{Fix}(f^n) = \Omega(f^n) = \Omega(g) = \mathrm{Fix}(g)$, 于是由 $h(f^n) = h(f^n|\Omega(f^n)) = h(g|\Omega(g)) = h(g) = 0$, 故 $h(f) = 0$.

2) $\deg(f) \geq 2$, 首先指出引理3、4对单调映射依然成立. 事实上, 设A 是引理4证明中新增加点的点集, 在$f^{-1}(A) \cap f^{(k-1)}(I_{s_1\cdots s_n})$ 中取点集A_1, 使得$\mathrm{Card}A_1 = \mathrm{Card}A$, $f(A_1) = A$, 归纳地在$f^{-1}(A_{i-1}) \cap f^{(k-i)}(I_{s_1\cdots s_n})$ 中取点集A_i 使得$\mathrm{Card}A_i = \mathrm{Card}A_{i-1}$, $f(A_i) = A_{i-1}$, 记$F^1 = F \cup A_K$, 可以仿照引理4的证明得$O_n(\epsilon, I_{s_1\cdots s_n}) \leq nM$. 余下部分与命题1的相同.

定理 设$f: S^1 \to S^1$ 是单调的连续映射, 则f 的拓扑熵$h(f) = \log|\deg(f)|$.

最后注意到扩张映射是严格单调的连续映射, 立刻得到:

推论1 若$f: S^1 \to S^1$ 是扩张映射, 则$h(f) = \log|\deg(f)|$.

推论2 若$f: S^1 \to S^1$ 是连续满射, 且$(S^1_f, \tilde{f})$ 是可扩的, 则$h(f) = \log|\deg(f)|$.

证明 由[5]知若$(S^1_f, \tilde{f})$ 可扩, 则f 与扩张映射$g: S^1 \to S^1$, $g(z) = z^m$ (这里$m = \deg(f)$) 是拓扑共轭的, 故有$h(f) = \log|\deg(f)|$.

参 考 文 献

[1] W. Szlenk, *An Introduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems*, A Wiley-Interscience Publication, 1984.

[2] 刘旺金, S^1 上扩张映射的拓扑熵, 科学通报, 4(1983), 202—203.

[3] Z. Nitecki and C. Robinson, *Global Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1980.

[4] 周作领, 无周期点的圆周自映射, 数学学报, 30(1987), 523—527.

[5] 何连法, 王在洪, 圆周上逆极限可扩的连续自映射, 数学学报, 39: 3(1996).

The Topological Entropy of Monotone Maps on Circles

He Lianfa *Wang Zaihong*

(Hebei Teachers' University, Shi Jiazhuang 050016)

Abstract

In this paper, we study the topological entropy of monotone maps on circles and prove the topological entropy of a continual monotone map f is $h(f) = \log|\deg(f)|$.

Keywords entropy, span-set.