第16卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 3
1996年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1996

作为$\mathbf{T}$-空间$\mathbf{T}$-伦型不变量的特异指数*

张　增　喜
(首都师范大学数学系, 北京 100037)

摘　要　对$\mathbf{T}$-空间之间引进了$\mathbf{T}$-映射, $\mathbf{T}$-同胚, $\mathbf{T}$-映射的$\mathbf{T}$-同伦, $\mathbf{T}$-空间的$\mathbf{T}$-同伦等价等概念. 对$\mathbf{T}$-紧致连通Hausdorff空间应用Čech-smith特异上同调理论定义了特异指数的概念, 并在此基础上证明了$\mathbf{T}$-空间的特异指数是$\mathbf{T}$-空间的$\mathbf{T}$-伦型不变量, 从而也证明了它是$\mathbf{T}$-空间的$\mathbf{T}$-同胚不变量.

关键词　$\mathbf{T}$-同胚, $\mathbf{T}$-同伦, ρ-上同调序列, ρ-边缘同态, 特异指数
分类号　AMS(1991) 55N, 55P/CCL O189.22

1　定义与命题

应用[1]中的一些记号和记法.

用$(X, \mathbf{T})$表示$\mathbf{T}$-空间, 即其中X是拓扑空间, $T\in\mathbf{T}$是从X到自身的周期为p ($p>1$, 整数)的拓扑变换, 并设它是素质的(primitive)[2], 易见, 如果p是素数, 则T总是素质的, $\mathbf{T}$是由T生成的循环变换群. 以下普遍设所有$\mathbf{T}$-空间中的变换T的周期均为p; 记F为T的不动点集.

定义1.1　设$(X, \mathbf{T})$, $(\tilde{X}, \mathbf{T})$都是$\mathbf{T}$-空间, 称$f: (X, \mathbf{T})\to(\tilde{X}, \mathbf{T})$为$\mathbf{T}$-映射, 如果$f: X\to\tilde{X}$是连续映射且使得$fT=Tf$.

命题1.2　若$f: (X, \mathbf{T})\to(\tilde{X}, \mathbf{T})$, $g: (\tilde{X}, \mathbf{T})\to(\tilde{\tilde{X}}, \mathbf{T})$均为$\mathbf{T}$-映射, 则$gf$也为$\mathbf{T}$-映射$gf: (X, \mathbf{T})\to(\tilde{\tilde{X}}, \mathbf{T})$.

定义1.3　设$(X, \mathbf{T})$, $(\tilde{X}, \mathbf{T})$都是$\mathbf{T}$-空间, 称$\mathbf{T}$-映射$f: (X, \mathbf{T})\to(\tilde{X}, \mathbf{T})$为$\mathbf{T}$-同胚, 如果$f: X\to\tilde{X}$是同胚. 此时还称$(X, \mathbf{T})$与$(\tilde{X}, \mathbf{T})$是$\mathbf{T}$-同胚的, 并记作$(X, \mathbf{T})\cong(\tilde{X}, \mathbf{T})$.

定义1.4　设$f_0, f_1: (X, \mathbf{T})\to(\tilde{X}, \mathbf{T})$均为$\mathbf{T}$-映射, 如果存在连续映射$H: X\times I\to\tilde{X}$使得图表

$$\begin{array}{ccc} X\times I & \xrightarrow{H} & \tilde{X} \\ T\times 1\downarrow & & \downarrow T \\ X\times I & \xrightarrow{H} & \tilde{X} \end{array}$$

可交换, 这里$H(x, t)=f_t(x)$且$H(x, 0)=f_0(x)$, $H(x, 1)=f_1(x)$, $x\in X$, $t\in I=[0, 1]$, 在

* 1993年11月17日收到. 94年8月收到修改稿.

$T\times 1$中，$1: I\to I$ 是恒同映射，此时称 f_0 与 f_1 是 $\mathbf{T}$-同伦的，并记作 $f_0\simeq f_1: (X,\mathbf{T})\to(\tilde{X},\mathbf{T})$，而称 H 为 f_0 与 f_1 之间的 $\mathbf{T}$-同伦或 $\mathbf{T}$-伦移.

定义1.5　若 $\mathbf{T}$-映射 $f: (X,\mathbf{T})\to(\tilde{X},\mathbf{T})$ 和 $g: (\tilde{X},\mathbf{T})\to(X,\mathbf{T})$ 使得

$$gf\simeq 1: (X,\mathbf{T})\to(X,\mathbf{T}) \text{ 及 } fg\simeq 1: (\tilde{X},\mathbf{T})\to(\tilde{X},\mathbf{T})$$

则称 f 是 $\mathbf{T}$-同伦等价，g 是其 $\mathbf{T}$-同伦逆，此时还称 $(X,\mathbf{T})$ 与 $(\tilde{X},\mathbf{T})$ 是 $\mathbf{T}$-同伦等价的或称 $(X,\mathbf{T})$ 与 $(\tilde{X},\mathbf{T})$ 有相同的 $\mathbf{T}$-伦型并记作 $(X,\mathbf{T})\simeq(\tilde{X},\mathbf{T})$.

容易看出，若 $f: (X,\mathbf{T})\to(\tilde{X},\mathbf{T})$ 是 $\mathbf{T}$-同胚，则它也是 $\mathbf{T}$-同伦等价，而 $f^{-1}: (\tilde{X},\mathbf{T})\to(X,\mathbf{T})$ 是其 $\mathbf{T}$-同伦逆.

2　特异指数的定义

沿用[1]，[3]，[4]中的记号和记法.

本节总假定 $(X,\mathbf{T})$ 等是 $\mathbf{T}$-紧致连通 Hausdorff 空间，T 是素质的且无不动点：$F=\varnothing$.

对于 $(X,\mathbf{T})$ 的特异上同调群有

命题2.1　对所有整数 $s\geq 0$，

$$^{\rho'}H^s(X,G)={}^{\bar{\rho}'}H^s(X,G)\ (\rho'=\sigma \text{ 或 } \tau'\text{，相应地 } \bar{\rho}'=\tau \text{ 或 } \sigma'\text{，} \rho'\neq\bar{\rho}')\text{，}$$

其中 G 为值群[3].

命题2.2　ρ'-上同调序列

$$\cdots\to{}^{\rho'}H^s(X,G)\xrightarrow{i_{\rho'}}\check{H}^s(H,G)\xrightarrow{j_{\rho'}}{}^{\rho'}H^s(X,G)\xrightarrow{k_{\rho'}}{}^{\rho'}H^{s+1}(X,G)\xrightarrow{i_{\rho'}}\cdots$$

总是正合的，其中 $\check{H}^s(X,G)$ 是一般 Čech 上同调群[3].

由命题2.1和2.2又有

命题2.3　ρ'-上调序列

$$\cdots\to{}^{\bar{\rho}'}H^s(X,G)\xrightarrow{i_{\rho'}}H^s(H,G)\xrightarrow{j_{\rho'}}{}^{\rho'}H^s(X,G)\xrightarrow{k_{\rho'}}{}^{\bar{\rho}'}H^{s+1}(X,G)\xrightarrow{i_{\rho'}}\cdots$$

总是正合的.

将 ρ 和 $\bar{\rho}$ 交换

命题2.4　$\bar{\rho}'$-上同调序列

$$\cdots\to{}^{\rho'}H^s(X,G)\xrightarrow{i_{\bar{\rho}'}}H^s(X,G)\xrightarrow{j_{\bar{\rho}'}}{}^{\bar{\rho}'}H^s(X,G)\xrightarrow{k_{\bar{\rho}'}}{}^{\rho'}H^{s+1}(X,G)\xrightarrow{i_{\bar{\rho}'}}\cdots$$

总是正合的.

再将命题2.3和2.4中的边缘同态

$$^{\rho'}H^s(X,G)\xrightarrow{k_{\rho'}}{}^{\bar{\rho}'}H^{s+1}(X,G)\text{，}$$

及

$$^{\bar{\rho}'}H^s(X,G)\xrightarrow{k_{\bar{\rho}'}}{}^{\bar{\rho}'}H^{s+1}(X,G)$$

依照维数递增的次序交错地连接起来，则得

定义2.5　序列

$$\cdots\to{}^{\rho'}H^s(X,G)\xrightarrow{k_{\rho'}}{}^{\bar{\rho}'}H^{s+1}(H,G)\xrightarrow{k_{\bar{\rho}'}}{}^{\rho'}H^{s+2}(X,G)\xrightarrow{k_{\rho'}}{}^{\bar{\rho}'}H^{s+3}(X,G)\to\cdots$$

称为 ρ'-边缘同态序列.

在上序列中,令 $\rho \stackrel{\triangle}{=} \bar{\tau}', s = 0$,则序列2.5变成

定义2.6 序列

$$^{\bar{\tau}'}H^0(X,G) \xrightarrow{k_{\bar{\tau}'}} {}^{\tau'}H^1(X,G) \xrightarrow{k_{\tau'}} {}^{\bar{\tau}'}H^2(X,G) \xrightarrow{k_{\bar{\tau}'}} {}^{\tau'}H^3(X,G) \to \cdots$$

称为 τ'-边缘同态序列

将交错的序列 $\bar{\tau}', \tau', \bar{\tau}', \cdots$ 及 $k_{\bar{\tau}'}, k_{\tau'}, k_{\bar{\tau}'}, \cdots$ 分别记为 $\tau_0', \tau_1', \tau_2', \cdots$ 及 $k_{\tau_0'}, k_{\tau_1'}, k_{\tau_2'}, \cdots$,于是序列2.6变成

定义2.7 序列

$$^{\tau_0'}H^0(X,G) \xrightarrow{k_{\tau_0'}} {}^{\tau_1'}H^1(X,G) \xrightarrow{k_{\tau_1'}} {}^{\tau_2'}H^2(X,G) \xrightarrow{k_{\tau_2'}} {}^{\tau_3'}H^3(X,G) \to \cdots$$

称为 τ_s'-边缘同态序列

将序列2.7中前 s 个边缘同态复合起来得到 ρ 边缘同态

$$k_{\tau', s} = k_{\tau_{s-1}'} \cdots k_{\tau_1'} k_{\tau_0'}: {}^{\tau_0'}H^0(X,G) \to {}^{\tau_s'}H^s(X,G).$$

可以证明 $^{\tau_0'}H^0(X,G) \approx G$,从而对于每一元素 $g \in G$ 有唯一0-维特异上类 $z^{0^*} \in {}^{\tau_0'}H^0(X, G)$ 与之对应

定义2.8 设 $(X, \mathbf{T})$ 适合本节开头所作的假设,则对于元素 $g \in G$ 有唯一0-维特异上类 $z^{8^*} \in {}^{\tau_0'}H^0(X,G)$ 与之对应,称

$$A^s(X,G,g) = k_{\tau', s}(z^{0^*}) \in {}^{\tau_s'}H^s(X,G)$$

为 $\mathbf{T}$-空间 $(X, \mathbf{T})$ 关于值群 G 及元素 $g \in G$ 的特异上类,如果存在最小正整数 m 使得

$$A^n(X,G,g) = 0,$$

则这个最小正整数 m 称为 $\mathbf{T}$-空间 $(X, \mathbf{T})$ 关于值群 G 及元素 $g \in G$ 的特异指数并记作

$$I_n(X,G,g): I_n(X,G,g) = m;$$

如果这样的整数不存在,则称其特异指数为 $+\infty$,即令

$$I_n(X,G,g) = +\infty.$$

容易看出,特异指数与值群 G 以及 G 中特定元素 g 有关

3 主要结果

定理 设 $(X, \mathbf{T})$, $(\tilde{X}, \mathbf{T})$ 均为 $\mathbf{T}$-紧致连通 Hausdorff 空间,在 $(X, \mathbf{T})$, $(\tilde{X}, \mathbf{T})$ 上的 $T \in \mathbf{T}$ 均无不动点,且 $(X, \mathbf{T}) \simeq (\tilde{X}, \mathbf{T})$,则对于任一值群 G 及任一元素 $g \in G$ 有

$$I_n(X,G,g) = I_n(\tilde{X},G,g).$$

推论 若 $f: (X, \mathbf{T}) \to (\tilde{X}, \mathbf{T})$ 为 $\mathbf{T}$-同胚, $(X, \mathbf{T})$ 为 $\mathbf{T}$-紧致连通 Hausdorff 空间且在 $(X, \mathbf{T})$ 上, $T \in \mathbf{T}$ 无不动点,则对于任一值群及任一元素 $g \in G$ 有

$$I_n(X,G,g) = I_n(\tilde{X},G,g).$$

参 考 文 献

[1] 张增喜, $\mathbf{T}$-可剖空间的特异同调群和特异上同调群的 $\mathbf{T}$-伦型不变性, 首都师范大学学报, 增刊, 1994

[2] P. A. Smith, *Fixed Points of Periodic Transformations*, Appendix B in S. Lefschetz, Algebraic topology, New York, 1942.
[3] S. D. Liao, *A theorem on periodic transformations of homology spheres*, Ann. of Math., Vol 56, 1952.
[4] 张增喜, $\mathbf{T}$-紧致空间的 χ-Čech-同调群及 χ'-Čech 同调群对 $\mathbf{T}$-伦型的不变性, 首都师范大学学报, 增刊, 1995.

Special Singular Indices of $\mathbf{T}$-Spaces as Invariant Quanta of $\mathbf{T}$-Homotopy Types of $\mathbf{T}$-Spaces

Zhang Zengxi
(Dept. of Math., Capital Normal Univ., Beijing 100037)

Abstract

In this paper, we introduce the concepts of $\mathbf{T}$-map, $\mathbf{T}$-homeomorphism, $\mathbf{T}$-homotopies between $\mathbf{T}$-maps, $\mathbf{T}$-homotopy-equivalents between $\mathbf{T}$-spaces, and define the concept of special singular index of $\mathbf{T}$-space by Čech-Smith special singular cohomology theory for $\mathbf{T}$-compact connected Hausdorff spaces. We prove that the special singular indeces of $\mathbf{T}$-spaces are the invariant quanta for $\mathbf{T}$-homotopy-types of $\mathbf{T}$-spaces, the invariant quanta for $\mathbf{T}$-homeomorphism-types of $\mathbf{T}$-spaces, too.

Keywords $\mathbf{T}$-homeomorphism, $\mathbf{T}$-homotopy, ρ'-cohomology sequence, ρ'-boundary homomorphism, special singular index.