第16卷第3期 数学研究与评论 Vol.16 No.3
1996年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1996

全平面上的高斯曲率方程*

王元明 王明网
(东南大学数学力学系, 南京210096) (东南大学微电子中心, 南京210096)

摘 要 本文用Schauder不动点定理证明了一维$K\geq 0$的解、二维$K\geq 0$的径向解的存在性,同时证明了当$K\leq 0$时,在无穷远处有不同渐近性的K所对应的极大解的渐近性,并给出了径向解的刻画,推广了前人结果.

关键词 高斯曲率,无界域问题,半线性椭圆型方程
分类号 AMS(1991) 58G03/CCL O175.25

1 问题的提出

设(M,g)为二维Riemann流形,K是M上的光滑函数,问:能否找到与g共形的度量$g_1(g_1=\varphi g,\varphi>0)$使得$K$是$(M,g_1)$的高斯曲率?令$\varphi=e^{2u}$,则这个问题化为求方程

$$\Delta_g u-k+Ke^{2u}=0 \quad 在M内 \tag{1}$$

的古典解,其中Δ_g为M上关于度量g的Laplace-Beltrami算子,k为M上关于度量g的高斯曲率.若$M=R^2$,g为标准度量,则(1)化为

$$\Delta u+Ke^{2u}=0 \quad 在R^2内, \tag{2}$$

其中Δ为通常的Laplace算子.本文考虑问题(2),此问题有两大困难:(1)R^2上求解,通常的Sobolev空间的紧性不再成立;(2)含有e^{2u}项,要用到类似Trudinger不等式的估计.

1972年Sattinger给出了$K\leq 0$解不存在的例子[1],W.M.Ni用上下解方法给出了$K\leq 0$解的存在性的例子[2],后来R.McOwen改进了Ni的结果[3],文[4,5]给出了极大解及部分解集的刻画,[6]中讨论了一维及多维的情况.对于$K\geq 0$,文[7,8]证明了解的存在性,文[9]得到了有解$u_\alpha=\alpha\ln|x|+O(1)$所必须的最好参数:$\alpha<\frac{l-2}{2}$,$l>0$且$K(x)\sim|x|^l$于$\infty$处.本文的结果如下:

定理1 一维情况

$$u_{xx}+Ke^{2u}=0 \text{ 在} R^1\text{上} \tag{3}$$

设$K\geq 0$,$K(0)>0$,$\int_{-\infty}^{\infty}K(x)dx<+\infty$,则(3)有无穷多个解,且当$|x|\to\infty$时线性衰减于$-\infty$.

定理2 对于方程(2),设$K\geq 0$,K是径向的$(K(x)=K(|x|))$,$K(0)>0$,且

* 1993年8月24日收到.94年4月9日收到修改稿.国家自然科学基金资助项目.

$\int^{\infty} s^{1+c}K(s)ds < +\infty$, 常数 $c > 0$, 则有无穷多个径向解, 且当 $|x| \to \infty$ 时对数衰减于 $-\infty$.

定理 3 设 $K \leq 0$, $K \sim -|x|^{2(m-1)}e^{-2|x|^{2m}}$, $m > 0$, 于 ∞, 则(2) 的极大解 $U = |x|^{2m} + O(1)$ 于 ∞. $m = 1$ 即为[4] 的引理 3.1.

定理 4 在定理 3 的假设下, 再设 K 是径向的, 则有

① 对任意 $\alpha > 0$, (2) 存在唯一解满足

$$u_\alpha = \alpha\ln|x| + O(1) \quad 于\ \infty. \tag{4}$$

② 设(2) 的解为径向的, 那么 $a \equiv U$ (定理 2 给出) 或者 $u \equiv u_\alpha$

③ 对于 $\alpha > \beta > 0$, 有 $u_\alpha > u_\alpha$ 在 R^2 内.

2 定理 1、2 的证明

2.1 定理 1 的证明

找方程(3) 满足 $u(0) = \beta, u'(0) = 0$ 的解等价于找如下方程的不动点:

$$u(x) = \beta - \int (x - t)K(t)e^{2u(t)}dt,\ x \in R. \tag{5}$$

先在$[0, \infty)$ 上找解. 取 $\beta < 0, \alpha \geq 1$ 满足: $\int_1 K(t)e^{2\beta}dt \leq 1$, $\int^{\infty} e^{2\beta}K(t)dt \leq \alpha$. 记 X 为$[0, +\infty)$ 上所有连续函数构成的局部凸的空间, $Y = \{v \in X \mid A_\beta(x) \leq v(x) \leq \beta, x \geq 0\}$, 其中 $A_\beta(x) = \begin{cases} \beta - 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ \beta - \alpha x & x > 1 \end{cases}$, 定义算子 T: $Tv = u(x)$. 显然 T 是 $Y \to Y$ 的映射. 设$\{v_m\} \subset Y$, $v_m \to v$ 在 X 内, 则 $v \in Y$, 且有

$$|Tv_m - Tv| \leq \int (x - t)K(t)\left|e^{2v_m(t)} - e^{2v(t)}\right|dt \leq \int (x - t)K(t)e^{2\beta}dt.$$

由勒贝格控制收敛定理知 Tv_m 在$[0, \infty)$ 上的任意紧子区间上一致收敛于 Tv. 由于

$$0 \geq (Tv)'(x) = -\int K(t)e^{2v(t)}dt \geq -\int^{\infty} K(t)e^{2\beta}dt,\ v \in Y,$$

所以在$[0, \infty)$ 上任意紧子区间上 TY 是一致有界、等度连续的, 即 TY 在 Y 中是相对紧的. 由 Schauder 不动点定理知 T 有不动点, 即在$(0, \infty)$ 上有解. 在$(-\infty, 0]$ 上解的存在性的证明类似, 从略. 取 $x > 0$ 且充分大, 则

$$u(x) \leq \beta - \int (x - t)K(t)e^{2u(t)}dt = \beta + \int tK(t)e^{2u(t)}dt - x\int K(t)e^{2u(t)}dt.$$

由于 $K(0) > 0$, 则 $\int K(t)e^{2u(t)}dt > 0$, 则解在 $+\infty$ 处线性衰减于 $-\infty$. $-\infty$ 处可类似证明. 满足 $\int_1 K(t)e^{2\beta}dt \leq 1$ 的 β 有无限多个, 故(3) 的解也有无穷多个.

2.2 定理 2 的证明

找方程(2) 满足 $u(0) = \beta, u'(0) = 0$ 的解等价于求如下方程的不动点:

$$u(r) = \beta - \int s\ln\left(\frac{r}{s}\right)K(s)e^{2u(s)}ds.$$

取 X 同定理 1 的证明中的, $Y = \{v \in X \mid A_1(r) \leq v(r) \leq A_2(r), r \geq 0\}$, 其中

$$A_1(r) = \begin{cases} \beta - 1 \\ \beta - 1 - \alpha_1 \ln \frac{r}{e}, \end{cases} \quad A_2(r) = \begin{cases} \beta + 1, & 0 \leq r \leq e \\ \beta + 1 - \alpha_2 \ln \frac{r}{e}, & r > e. \end{cases}$$

取 $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ 满足

$$0 < \alpha_2 \leq \alpha_1,$$

$$\int s \ln \frac{e}{s} K(s) e^{2(\beta+1)} ds \leq 1, \tag{6}$$

$$\int^{\infty} sK(s) e^{2(\beta+1)} ds \leq \alpha_1, \tag{7}$$

$$\int sK(s) e^{2(\beta-1)} ds \geq \alpha_2, \tag{8}$$

$$\int^{\infty} sK(s) \ln \frac{e}{s} e^{2(\beta-1)} \left(\frac{e}{s}\right)^{2\alpha_1} ds \geq -1. \tag{9}$$

选定 $\alpha_1 > 0$, 选 β 充分小使 (6), (7), (9) 成立, 由 $K(0) > 0$ 选 $\alpha_2 > 0$ 使 (8) 成立. 定义 $T: Tv = u$, 对于 $0 \leq r \leq e$ 有

$$\beta \geq u \geq \beta - \int s \ln \frac{e}{s} K(s) e^{2u(s)} ds \geq \beta - 1.$$

对于 $r > e$, 有

$$\begin{aligned} u &\geq \beta - \int s \ln \frac{e}{s} K(s) e^{2(\beta+1)} ds - \int s \ln \frac{e}{s} K(s) e^{2(\beta+1)} ds - \int^{\infty} s \ln \frac{r}{e} K(s) e^{2(\beta+1)} ds \\ &\geq \beta - 1 - \alpha_1 \ln \frac{r}{e}, \\ u &\leq \beta - \int s \ln \frac{r}{e} K(s) e^{2(\beta-1)} ds - \int s \ln \frac{e}{s} K(s) e^{2(\beta-1)} ds - \int s \ln \frac{r}{e} K(s) e^{2(\beta-1)} \left(\frac{e}{s}\right)^{2\alpha_1} ds \\ &\quad - \int^{\infty} s \ln \frac{e}{s} K(s) e^{2(\beta-1)} \left(\frac{e}{s}\right)^{2\alpha_1} ds \\ &\leq \beta + 1 - \alpha_2 \ln \frac{r}{e}, \end{aligned}$$

设 $\{v_m\} \subset Y$, $v_m \to v$ 在 X 内, 则 $v \in Y$, 且有

$$|Tv_m - Tv| \leq \int s \ln \frac{r}{s} K(s) \left|e^{2v_m} - e^{2v}\right| ds,$$

$$\left|e^{2v_m} - e^{2v}\right| \leq e^{2(\beta+1)}, \quad 0 \leq s \leq r.$$

由勒贝格控制收敛定理得 T 在 Y 中的连续性

$$0 \geq (Tv)'(r) \geq -\int \frac{s}{r} K(s) e^{2(\beta+1)} ds,$$

同定理 1 中的证明一样可得 TY 在 Y 中是相对紧的. 由 Schauder 不动点定理知(2) 有解且当 $|x| \to \infty$ 时对数衰减于 $-\infty$. 因为 α_1 定下后, β 可取无穷多个值, 所以可得无穷多个解. 证毕.

3 定理 3、4 的证明

3.1 定理 3 的证明

令 $\tilde{K}(r)=\max\limits_{|x|=r}K(x)$，设 $-c_2r^{2(m-1)}e^{-2r^{2m}}\le\tilde{K}\le -c_1r^{2(m-1)}e^{-2r^{2m}}$，于 ∞ 处，$\tilde{K}$ 对应的极大解记为 $\tilde{U}$，则由[4]知 $\tilde{U}\ge U$ 在 R^2 内，且 $\tilde{U}$ 为径向的．令 $W=\tilde{U}(r)-r^{2m}$，则

$$\Delta W=-\tilde{K}e^{2r^{2m}}e^{2w}-4m^2r^{2(m-1)}\ge r^{2(m-1)}(c_1e^{2w}-4m^2).\qquad(10)$$

假设 W 无上界，则有 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}W(r)=+\infty$，存在 $R>0$，使得下二式成立

$$0<R^{2(m-1)}(c_1e^{2W(R)}-4m^2)=(rW_r')_r'\big|_{r=R},$$
$$W_r'(R)\ge 0.$$

因而存在 $\epsilon>0$，对于 $R\le r<R+\epsilon$ 有 $rW_r'(r)>RW_r'(R)\ge 0$，W 在 $[R,R+\epsilon)$ 上严格增加，$W_r'(R+\epsilon)\ge 0$，则 $R+\epsilon$ 可代替 R 一直下去，可得 W 在 $[R,+\infty)$ 上单调增加到 $+\infty$．由(10)知存在常数 $\tilde{R}>1$，$c>0$ 使得下二式成立

$$\Delta W\ge cr^{2(m-1)}e^{2w},\quad r\ge\tilde{R},$$
$$W_r'(\tilde{R})\ge 0.$$

令 $s=\ln r$，有

$$W_{ss}''=cr^{2m}e^{2w}\ge ce^{2w},\ s>S,$$
$$W_s'(S)\ge 0,\ \text{其中}\ S=\ln\tilde{R}.$$

此即[4]的(3.5)式，这个矛盾说明 W 有上界．

证明 $U-r^{2m}$ 下有界．$u=|x|^{2m}-c$ 是如下方程的解：

$$\Delta u-4m^2|x|^{2m-2}e^{-2|x|^{2m}}e^{2c}e^{2u}=0,\quad \text{在}\ R^2\ \text{内}$$

记其极大解为 U^*，对于充分大的 c 有

$$K\ge -4m^2|x|^{2(m-1)}e^{-2|x|^{2m}}e^{2c},\quad \text{在}\ R^2\ \text{内}$$

这样就有 $U\ge U^*\ge|x|^{2m}-c$． □

3.2　定理4的证明

①及③同[4]的Proposition 4.21，只需证②．设径向解 $u\ne U$，则 $u<U$，在 R^2 内．令 $\varphi(r)=U(r)-u(r)$，则 $\Delta\varphi\ge 0$，而且在 R^2 的某些地方上严格不等，这样 $\varphi(r)$ 单调非减且 $\varphi(r)\ge\epsilon\ln r$，于 ∞，$\epsilon>0$．设

$$|x|^{2m}-c_4\le U\le|x|^{2m}+c_3,\quad \text{于}\ \infty.$$

取 R 充分大，则有

$$\begin{aligned}\Delta\varphi&\ge c_1r^{2(m-1)}e^{-2c_4}-c_2r^{2(m-1)}e^{-2(r^{2m}-u)}\ge c_1r^{2(m-1)}e^{-2c_4}-c_2r^{2(m-1)}e^{-2\varphi+O(1)}\\&\ge c_1r^{2(m-1)}e^{-2c_4}-c_2'r^{2(m-1)}r^{-2\epsilon}\ge cr^{2(m-1)},\ r\ge R.\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases}(r\varphi_r')_r'\ge cr^{2(m-1)},\ r\ge k,\\ \varphi_r'(R)\ge 0.\end{cases}$$

积分两次得 $\varphi(r)\ge cr^{2m}$，于 ∞，所以 $u(r)\le U(r)-cr^{2m}$，于 ∞，有

$$\alpha(u)=\int^{\infty}s(-K(s))e^{2u(s)}ds<+\infty.$$

下面的证明完全和[4]一样．

参 考 文 献

[1] D. H. Sattinger, *Conformal metrics in R^2 with prescribed curvature*, Indiana Univ. Math. J., 22 (1972), 1-4.

[2] W. M. Ni, *On the elliptic equation $\Delta u + Ke^{2u} = 0$ and conformal metrics with prescribed Guassian curvature*, Ivent. Math., 66(1982), 343-352.

[3] R. McOwen, *On the equation $\Delta u + Ke^{2u} = f$ and prescribed negative curvature in R^2*, J. Math. Anal. Appl., 103(1984), 365-370.

[4] K. S. Cheng and W. M. Ni, *On the structure of the conformal Guassian curvature equations on R^2*, Ⅰ., Math. J., 62: 3(1991), 721-737.

[5] K. S. Cheng and W. M. Ni, *On the structure of the conformal Guassian curvature equations on R^2*, Ⅱ, Math. Ann., 290(1991), 671-680.

[6] K. S. Cheng and J. T. Lin, *On the elliptic equations $\Delta u = K(x)u^{\sigma}$ and $\Delta u = K(x)e^{2u}$*, Trans. Amer. Math. Soc., 304: 2(1987), 639-668.

[7] R. McOwen, *Conformal metrics in R^2 with prescribed Guassian curvature possitive total curvature*, Indiana Uni. J., 34: 1(1985), 89-104.

[8] P. Aviles, *Conformal complete metrics with prescribed non-negative Guassian curvature in R^2*, Invent. Math., 83(1986), 519-544.

[9] O. A. Oleinik, *On the equation $\Delta u + K(x)e^{u} = 0$*, Russian Math. Surveys, 33(1978), 243-244.

Gaussian Curvature Equation on the Whole Plane

Wang Yuanming

(Dept. of Math. & Mech., Southeast Univ., Nanjing 210018)

Wang Mingwang

(Microelectronic Centre, Southeast Univ., Nanjing 210018)

Abstract

In this paper, the existences of solutions for $K \geq 0$ in one dimension and radial solutions for $K \geq 0$ in two dimensions are proved by the Schauder's fixed-point theorem. Moreover, the asymptotic behavior of the maximal solution is described and the radial solutions are classified for $K \leq 0$ and has appropriate asympototic behavior at infinite distance.

Keywords Gaussian curvature, problem with unbounded domain, semilinear elliptic equation.