第16卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 3
1996年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1996

L-逆左系对幺半群的刻画*

刘　仲　奎
(西北师范大学数学系, 兰州 730070)

摘　要　正则左 S-系是 von Neumann 正则半群的自然推广, 逆左 S-系是逆半群的自然推广. 作为左逆半群的自然推广, 本文引入了 L-逆左系的概念, 并用来刻画了几类幺半群, 如左逆幺半群, 逆幺半群, adequate 幺半群等.

关键词　L-逆左系, 正则左系, 逆左系
分类号　AMS(1991) 20M50, 20M20/CCL O152.7

1　定义及例子

本文中, S 总是表示幺半群, 所用记号均来自于[1].

设 A 是左 S-系, 根据[2], [3], 称 A 是正则的, 如果对任意 $a \in A$, 存在 S-同态 $f: Sa \to S$, 使得 $f(a)a = a$. 显然, 如果 S 是 von Neumann 正则幺半群或右可消幺半群, 则左 S-系 ${}_SS$ 是正则的.

设 $a \in A$, $e \in E(S)$. 如果 $ea = a$, 且关于任意的 $r, p \in S$, 由 $ra = pa$ 可推出 $re = pe$, 那么就称 $\{a, e\}$ 是 A 的一个正则对[4]. 由[5], 对于 $a \in A$, 记

$$\mathbf{M}_a = \{e \in E(S) \mid \{a, e\} \text{ 是 } A \text{ 的正则对}\}.$$

由[4]可知 A 是正则的当且仅当对于任意 $a \in A$, $\mathbf{M}_a$ 非空. 如果对任意 $a \in A$, 都有 $|\mathbf{M}_a| = 1$, 则称 A 是逆左 S-系(见[4]. 根据[5], A 又可称为强正则左 S-系). 我们引入如下的定义:

定义 1.1　设 A 是正则左 S-系, $a \in A$. 若对任意 $e \in \mathbf{M}_a$, 和任意 $g \in E(S)$, 恒有 $ega = ga$, 则称 a 是 A 的 L-逆元. 若 A 中的所有元皆为 L-逆元, 则称 A 是 L-逆的.

例 1.2　(1) 设 S 是逆幺半群, 则 ${}_SS$ 是 L-逆的. 若 S 是右可消幺半群, 则 ${}_SS$ 也是 L-逆的. 特别地若 G 是群, 则左 G-系 ${}_GG$ 是 L-逆的.

(2)　设 $S = \{1, 0, u, v, w\}$, 非平凡部分的乘法表为

	u	v	w
u	0	0	0
v	u	v	w
w	u	v	w

由[4]可知 S 是幺半群. 容易看出, u 既不是右可消元, 也不是 von Neumann 正则元. 显然 $E(S)$

* 1993年7月3日收到. 甘肃省自然科学基金资助的课题

$= \{1, 0, v, w\}$, $\mathbf{M}_u = \{v, w\}$, $\mathbf{M}_v = \{v, w\}$, $\mathbf{M}_w = \{v, w\}$, 所以${}_S S$ 是正则左S-系 从乘法表容易知道

$$vwv = wv,\ wvw = vw,\ vwu = wu,\ wvu = vu.$$

所以易知 u, v, w 都是${}_S S$ 的L-逆元 显然 1, 0 也是${}_S S$ 的L-逆元 所以${}_S S$ 是L-逆的

这个例子说明L-逆的左S-系可以不是逆的

(3) 逆的左S-系也可以不是L-逆的 设X 是集合且 $|X| \geq 2$ 记$P(X)$ 为X 上的所有映射关于映射的合成构成的幺半群, 显然X 是左$P(X)$-系 由[4]可知, 对任意$x \in X$, $\mathbf{M}_x = \{c_x\}$, 这里 $c_x: X \to X$ 按如下定义:

$$c_x(y) = x, \quad \forall y \in X.$$

所以X 是逆的左$P(X)$-系 取不同的元素$x, y \in X$, 易知$c_x, c_y \in E(P(X))$. 因为$c_y x = c_y(x) = y$, $c_x c_y x = c_x c_y(x) = x$, 所以$c_x c_y x \neq c_y x$. 这说明$x$ 不是X 的L-逆元, 所以X 不是L-逆的

(4) L-逆的左S-系一定是正则的, 但反之不然 取S 是von Neumann 正则幺半群但不是左逆幺半群, 则${}_S S$ 是正则的, 但不是L-逆的

(5) 称S 是左PP 幺半群, 如果S 的所有主左理想皆为投射的[5], [8]. 设S 是左PP 幺半群且其幂等元都是中心元(这类幺半群以及它的推广在[6,], [8], [5] 中有详细的讨论). 假定A 是正则左S-系, $a \in A$. 对于任意的$e \in \mathbf{M}_a$, $g \in E(S)$, 有$ega = gea = ga$, 所以A 是L-逆的 特别地, S 的所有左理想都是L-逆的左S-系

(6) 设S 是可换的PP 幺半群 由[9]知S 是可消幺半群的半格 显然任意的正则左S-系一定是L-逆的

(7) 设$S = \{1, h, e, a, f, b, g, c\}$, 其乘法表为:

	h	e	a	f	b	g	c
h	h	e	a	g	g	g	g
e	e	e	e	g	g	g	g
a	a	e	e	g	g	g	g
f	c	c	c	f	f	g	c
b	c	c	c	f	f	g	c
g	g	g	g	g	g	g	g
c	c	c	c	g	g	g	g

则S 是幺半群[10]. 显然$E(S) = \{1, h, e, f, g\}$. 设$r, p \in S$ 使得$rc = pc$. 如果$r = 1$, 则$pc = c$, 所以$p \in \{1, f, b\}$, 因此有$rf = pf$. 如果$r \in \{h, e, a, g, c\}$, 则$pc = g$, 所以$p \in \{h, e, a, g, c\}$, 因此也有$rf = g = pf$. 如果$r \in \{f, b\}$, 则$pc = c$, 所以$p \in \{1, f, b\}$, 所以仍然有$rf = f = pf$. 又$c = fc$, 所以$\{c, f\}$ 是${}_S S$ 的正则对. 因此易知$\mathbf{M}_c = \{f\}$. 对于任意的$x \in E(S)$, 从乘法表容易验证$fxc = xc$, 所以c 是${}_S S$ 的L-逆元 显然g 是S 的零元, 所以$\{g, g\}$ 是正则对. 易知$\mathbf{M}_g = \{g\}$, 因为对任意$x \in E(S)$ 有$gxg = xg$, 所以g 也是L-逆元 令$A = \{g, c\}$, 则A 是S 的左理想, 所以${}_S A$ 是L-逆的

引理 1.3 L-逆左S-系的任意并仍然是L-逆的 L-逆左S-系的任意子系也是L-逆的

证明 由[2]知正则左S-系的并和子系都是正则的, 所以由定义 1.1 易得结论

命题1.4 设A是正则左S-系, $a \in A$. 则如下两条等价:

(i) a是A的L-逆元

(ii) 对任意$e \in \mathbf{M}_a$知$g \in E(S)$, 有$ege = ge$.

证明 对于$e \in \mathbf{M}_a$, $\{a, e\}$是正则对, 所以$ea = a$, 且从$ra = pa$能推出$re = pe$. 所以$ege = ge \Leftrightarrow ega = ga$.

2 对幺半群的刻画

定理2.1 设S是Von Neumann正则幺半群, 则有如下等价:

(i) S是左逆幺半群

(ii) 任意正则的左S-系是L-逆的

证明 设S是左逆幺半群, 则显然任意的正则左S-系是L-逆的(由命题1.4). 反之设所有的正则左S-系是L-逆的 因为S是von Neumann正则幺半群, 所以$_SS$是正则左S-系, 因此是L-逆的 对任意$e, f \in E(S)$, 显然$e \in \mathbf{M}_e$, 所以$efe = fe$. 所以S是左逆幺半群

引理2.2 设存在L-逆的左S-系, 则S有一个最大的L-逆左理想

证明 设A是L-逆的左S-系, $a \in A$, 则a是A的L-逆元 所以存在$e \in E(S)$, 使得$\{a, e\}$是正则对. 易知有S-同构$Sa \simeq Se$. 由引理1.3知Sa是L-逆的, 所以Se是L-逆的 这说明S有L-逆的左理想 令T是所有的L-逆的左理想的并, 则$T \neq \varnothing$. 由引理1.3知T是S的最大的L-逆左理想

[3]中构造了一个幺半群S使得任何左S-系都不是正则的, 所以任何左S-系都不是L-逆的 我们以下考虑当所有L-逆左S-系具有某种性质时, S应具有什么性质 故假定存在L-逆的左S-系

设A是左S-系, 称A是自由的, 如果$A \simeq \coprod S$, 这里S看成是左S-系[2]. 称A是左S-系范畴S-Act中的生成子, 如果存在满的S-同态$f: A \to S$[11]. 称A是强平坦的, 如果函子$- \otimes A$保持右S-系范畴Act-S中的恒等子和拉回[12],[15]. Bulman-Fleming[15]中证明了实际上$- \otimes A$保持拉回即可保证A是强平坦的 称A是平坦的, 如果对任意右S-系单同态$B \to C$, 诱导映射$B \otimes A \to C \otimes A$是单的[13],[14]. 称$A$是(主)弱平坦的, 如果对于$S$的任意(主)右理想$I$, 诱导映射$I \otimes A \to S \otimes A$是单的[13],[14]. A叫做是挠自由的, 如果关于任意的$a, b \in A$, 任意左可消元$s \in S$, 由$sa = sb$可推出$a = b$[2]. 下述引理可见[2], [16].

引理2.3 对于左S-系, 以下递推关系成立:

自由 ⇒ 投射生成子 ⇒ 投射 ⇒ 强平坦 ⇒ 平坦 ⇒ 弱平坦 ⇒ 主弱平坦 ⇒ 挠自由

但是上述所有递推关系的逆都不成立

定理2.4 如下几条等价:

(i) 所有L-逆左S-系是投射的

(ii) 所有L-逆左S-系是强平坦的

(iii) 对于任意$e \in T \cap E(S)$, Se是S的极小左理想, 这里T是S的最大L-逆左理想

证明 由引理2.3, (i) ⇒ (ii) 是显然的

(ii) ⇒ (iii) 设$e \in T \cap E(S)$, 则Se是L-逆的左理想 设存在S的左理想$L \leq Se$但L

$\neq Se$. 取 x, y, z 为三个符号. 令 $M = \{(se, x) \mid se \notin L\} \cup \{(se, y) \mid se \notin L\} \cup \{(se, z) \mid se \in L\}$. 定义 S 在 M 上的左作用为:

$$t(se, x) = \begin{cases} (tse, x), & tse \notin L \\ (tse, z), & tse \in L \end{cases}, \quad t(se, y) = \begin{cases} (tse, y), & tse \notin L \\ (tse, z), & tse \in L \end{cases},$$
$$t(se, z) = (tse, z).$$

容易验证 M 关于上述定义的 S-作用而成为左 S-系. 显然 $M = S(e, x) \cup S(e, y)$. 因为 $S(e, x) \simeq Se, S(e, y) \simeq Se$, 所以由引理 1.3 知 M 是 L-逆的. 由条件可知 M 是强平坦的, 故由[16]中的推论 1.10 知 M 是循环子系的不交并. 由 M 的构造知这是不可能的. 矛盾说明 Se 是 S 的极小左理想.

(iii) ⇒ (i)　设左 S-系 A 是 L-逆的, $a \in A$. 则 a 是 L-逆元, 因此存在 $e \in E(S)$, 使得 $\{a, e\}$ 是正则对. 所以有 S-同构 $Sa \simeq Se$. 由于 Sa 是 L-逆的, 所以 Se 是 L-逆的, 因此 $Se \subseteq T$, 故 $e \in T$. 由条件知 Se 是 S 的极小左理想, 所以 Sa 是单的左 S-系. 所以 A 可以写成一些单左 S-系的不交并. 而 A 的每一个单左 S-系都同构于某个 $Se, e \in E(S) \cap T$, 所以 A 是投射的.

定理 2.5　如下几条等价:

(i)　所有 L-逆的左 S-系是平坦的.

(ii)　所有 L-逆的左 S-系是弱平坦的.

(iii)　所有 L-逆的左 S-系是主弱平坦的.

(iv)　关于任意 $e \in T \cap E(S)$ 和任意 $s \in S$, se 常为 S 的 von Neumann 正则元. 这里 T 是 S 的最大 L-逆左理想.

证明　由引理 2.3 知 (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) 是显然的.

(iii) ⇒ (iv)　设 $e \in T \cap E(S), s \in S$. 如果 $Sse = Se$, 则存在 $t \in S$ 使得 $tse = e$, 所以 se 是 von Neumann 正则元. 因此我们假定 $Sse \neq Se$. 取三个符号 x, y, z. 令 $M = ((Se - Sse) \times \{x, y\}) \cup \{Sse \times \{z\}\}$. 和定理 2.4 的证明类似地定义 S 在 M 上的左作用, 则 M 构成一个左 S-系. 显然 $M = S(e, x) \cup S(e, y)$. 因为 $S(e, x) \simeq Se, S(e, y) \simeq Se$, 而 $Se \leq T$ 是 L-逆的, 所以 M 是 L-逆的, 从而是主弱平坦的.

显然有 $se(e, x) = (se, z) = se(e, y)$, 所以在 $S \otimes M$ 中有 $se \otimes (e, x) = se \otimes (e, y)$. 因为 M 是主弱平坦的, 所以在 $seS \otimes M$ 中有 $se \otimes (e, x) = se \otimes (e, y)$. 由[17]知存在 $s_1, s_2, \cdots, s_n \in S, m_2, \cdots, m_n \in M, u_1, v_1, \cdots, u_n, v_n \in S$ 使得

$$\begin{aligned} &se = ses_1u_1, && \\ &ses_1v_1 = ses_2u_2, && u_1(e, x) = v_1m_2, \\ &ses_2v_2 = ses_3u_3, && u_2m_2 = v_2m_3, \\ &\cdots\cdots && \cdots\cdots \\ &ses_nv_n = se, && u_nm_n = v_n(e, y). \end{aligned}$$

设 $m_i = (t_i, w_i), i = 2, \cdots, n$, 这里 $t_i \in S, w_i \in \{x, y, z\}$. 显然存在某个 i, 使得 $w_i = z$. 所以 $u_it_i \in Sse$. 因此, $se = ses_1u_1 = ses_1u_1e = ses_1v_1t_2 = ses_2u_2t_2 = ses_2v_2t_3 = ses_3u_3t_3 = \cdots = ses_iu_it_i \in seSse$, 所以 se 是 von Neumann 正则元.

(iv) ⇒ (i)　设 B 是 L-逆的左 S-系. 我们要证明 B 是平坦的. 设 A 是右 S-系, $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, 并且在 $A \otimes B$ 中有 $a \otimes b = a' \otimes b'$. 由[17]知我们只须证明在 $(aS \cup a'S) \otimes B$ 中

有 $a\otimes b=a'\otimes b'$ 即可. 由[17]可知存在 $a_1,\cdots,a_n\in A$, $b_2,\cdots,b_n\in B$, $s_1,t_1,\cdots,s_n,t_n\in S$ 使得

$$
\begin{array}{ll}
a=a_1s_1, & \\
a_1t_1=a_2s_2, & s_1b=t_1b_2,\\
a_2t_2=a_3s_3, & s_2b_2=t_2b_3,\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\\
a_nt_n=a', & s_nb_n=t_nb'.
\end{array}\tag{1}
$$

下面对 n 使用数学归纳法证明我们的结论.

设 $n=1$, 则等式组(1)变为

$$
\begin{array}{ll}
a=a_1s_2, & \\
a_1t_1=a', & s_1b=t_1b'.
\end{array}
$$

因为 $b,b'\in B$, 所以 b,b' 为 L-逆元. 故存在 $e,f\in E(S)$, 使得 $e\in\mathcal{M}_b$, $f\in\mathcal{M}_{b'}$. 显然有同构 $Sb\simeq Se$, $Sb'\simeq Sf$, 所以 Se,Sf 都是 L-逆左理想, 从而 $e,f\in T$. 由条件可知 s_1e 是 von Neumann 正则元, 所以存在 $u\in S$, 使得 $s_1e=s_1eus_1e$. 又因为 $t_1b'=s_1b=s_1eb=s_1eus_1eb=s_1eus_1b=s_1eut_1b'$, 所以由正则对的性质知有 $t_1f=s_1eut_1f$. 所以在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有:

$$
\begin{aligned}
a\otimes b&=a\otimes eb=ae\otimes b=a_1s_1e\otimes b=a_1s_1eus_1e\otimes b=a_1s_1eu\otimes s_1eb\\
&=a_1s_1eu\otimes t_1b'=a_1s_1eu\otimes t_1fb'=a_1s_1eut_1f\otimes b'=a_1t_1f\otimes b'\\
&=a'f\otimes b'=a'\otimes fb'=a'\otimes b'.
\end{aligned}
$$

设 $n\geq 2$. 为方便计, 令 $b_1=b$, $b_{n+1}=b'$. 因为 B 是 L-逆的, 所以 b_i 是 L-逆元, 因此存在 $e_i\in E(S)\cap\mathcal{M}_{b_i}$. 由同构 $Sb_i\simeq Se_i$ 可知 Se_i 也是 L-逆的, 所以 $e_i\in T$. 由等式组(1)可得如下的等式组:

$$
\begin{array}{l}
ae_1=a_1s_1e_1\\
\begin{array}{|l|l|}
\hline
a_1t_1e_2=a_2s_2e_2 & s_1e_1b=t_1e_2b_2\\
\hline
\multicolumn{1}{|l}{a_2t_2e_3=a_3s_3e_3} & \multicolumn{1}{l|}{s_2e_2b_2=t_2e_3b_3}\\
\multicolumn{1}{|l}{\cdots\cdots} & \multicolumn{1}{l|}{\cdots\cdots}\\
\multicolumn{1}{|l}{a_nt_ne_{n+1}=a'e_{n+1}} & \multicolumn{1}{l|}{s_ne_nb_n=t_ne_{n+1}b'}\\
\hline
\end{array}
\end{array}\tag{2}
$$

由于 s_1e_1 是 von Neumann 正则元, 故存在 $u\in S$ 使得 $s_1e_1=s_1e_1us_1e_1$. 所以由 $t_1b_2=s_1b=s_1e_1b=s_1e_1us_1e_1b=s_1e_1us_1b=s_1e_1ut_1b_2$ 得 $t_1e_2=s_1e_1ut_1e_2$. 考虑(2)中框线以内的等式组, 由归纳假定可知在 $(a_1t_1e_2S\cup a'e_{n+1}S)\otimes B$ 中有 $a_1t_1e_2\otimes b_2=a'e_{n+1}\otimes b'$. 因为 $a_1t_1e_2=a_1s_1e_1ut_1e_2=ae_1ut_1e_2\in aS$, 所以在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有

$$a'\otimes b'=a'\otimes e_{n+1}b'=a'e_{n+1}\otimes b'=a_1t_1e_2\otimes b_2.$$

考虑(2)中的前两行, 由归纳假定又可知在 $(aS\cup a_2s_2e_2S)\otimes B$ 中有 $ae_1\otimes b=a_2s_2e_2\otimes b_2$. 因为 $a_2s_2e_2=a_1t_1e_2\in aS$, 所以在 $(aS\cup a'S)\otimes B$ 中有

$$a\otimes b=a\otimes e_1b=ae_1\otimes b=a_2s_2e_2\otimes b_2=a_1t_1e_2\otimes b_2=a'\otimes b'.$$

这样我们就证明了 B 是平坦的左 S-系.

推论 2.6 设 S 是幺半群. 则 S 是左逆幺半群当且仅当左 S-系 $_SS$ 是 L-逆的且所有 L-逆

的左 S - 系是平坦(弱平坦, 主弱平坦) 的

证明　如果左 S - 系 $_SS$ 是 L - 逆的, 则 S 的最大 L - 逆左理想 $T = S$, 故 $1 \in T$. 若所有 L - 逆的左 S - 系还是主弱平坦的, 则由定理2.5知任意 $s \in S$, s 是 von Neumann 正则元. 设 $e, f \in E(S)$, 则显然 $e \in \mathbf{M}_e$. 所以再由 $_SS$ 的 L - 逆性可知 $efe = fe$. 故 S 是左逆幺半群.

反之设 S 是左逆幺半群, 则 $_SS$ 是 L - 逆左 S - 系. 再由定理2.5即可知所有 L - 逆的左 S - 系是平坦的.

定理2.7　如下两条等价:

(i)　所有 L - 逆左 S - 系是挠自由的.

(ii)　对任意 $e \in E(S) \cap T$, 任意左可消元 $r \in S$, 常有 $e \mathbf{L} re$. 这里 T 是 S 的最大 L - 逆左理想.

证明　(i) ⇒ (ii)　设 $e \in E(S) \cap T$, r 是 S 的左可消元. 如果 $\mathbf{L}_e \neq \mathbf{L}_{re}$, 则 $S_{re} \neq Se$. 和定理2.4的证明类似地作左 S - 系 $M = ((Se - Sre) \times \{x, y\}) \cup (Sre \times \{z\})$. 因为 $e \in T$, 所以易知 M 是 L - 逆的, 因而挠自由的. 所以由 $r(e, x) = (re, z) = r(e, y)$ 可得 $(e, x) = (e, y)$. 但这是不可能的. 所以 $e \mathbf{L} re$.

(ii) ⇒ (i)　设 A 是 L - 逆的左 S - 系, $a, b \in A$, $r \in S$ 是左可消元, 满足 $ra = rb$. 由 A 的 L - 逆性可知 $\mathbf{M}_a \neq \varnothing$, $\mathbf{M}_b \neq \varnothing$. 设 $e \in \mathbf{M}_a$, $f \in \mathbf{M}_b$. 则可以证明 $e \in T \cap E(S)$. 所以由条件知 $\mathbf{L}_e = \mathbf{L}_{re}$, 故存在 $t \in S$ 使得 $tre = e$, 容易知道 $rea = rfb$, 所以 $trea = trfb$, 因此 $trfb = ea = a$. 从而 $rb = ra = rtrfb$. 利用正则对 $\{b, f\}$ 的性质可知有 $rf = rtrff = rtrf$. 再利用 r 的左可消性可得 $f = trf$. 所以有

$$a = ea = trea = tra = trb = trfb = fb = b.$$

这就证明了 A 是挠自由的.

定理2.8　如下几条等价:

(i)　所有 L - 逆的左 S - 系是自由的.

(ii)　所有 L - 逆的左 S - 系是 S-Act 中的投射生成子.

(iii)　S 是群.

证明　(i) ⇒ (ii) 是显然的.

(ii) ⇒ (iii)　设 $e \in T \cap E(S)$, 则 Se 是 L - 逆的, 从而是投射生成子, 所以有满的 S - 同态 $f: Se \to S$. 设 $f(xe) = 1$. 令 $g: S \to Sxe$ 为 $g(s) = sxe$, 则 g 是 S - 同态且 $fg(s) = f(sxe) = sf(xe) = s$, $gf(sxe) = g(s) = sxe$, 所以 $S \simeq Sxe$. 另一方面, 由引理2.3知所有 L - 逆的左 S - 系是投射的, 所以由定理2.4知 Se 是 S 的极小左理想, 所以 $Sxe = Se$, 因此 $S \simeq Se$. 故 S 没有真的左理想, 所以 S 是群.

(iii) ⇒ (i)　当 S 是群时, 由[2]知所有正则左 S - 系都是自由的, 故所有 L - 逆左 S - 系是自由的.

设 A 是左 S - 系, $a \in A$, 称 a 是 A 的正则元, 如果 $\mathbf{M}_a \neq \varnothing$. 称 a 是 A 的逆元, 如果 $|\mathbf{M}_a| = 1$. 同样可以定义右 S - 系的正则元及逆元.

引理2.9　如下几条等价:

(i)　对于任意左 S - 系 A, A 中的正则元是逆元.

(ii)　$_SS$ 中的正则元是逆元.

(iii) 每个 $\mathcal{R}^*$-类中最多只有一个幂等元

证明 (i) ⇒ (ii) 是显然的

(ii) ⇒ (iii) 设 $a \in S$, a 所在的 $\mathcal{R}^*$-类 R_a^* 中有幂等元 e, f, 则由[18]中的推论1.2可知 $ea = a, fa = a$, 且对于任意 $x, y \in S$, 若 $xa = ya$, 则 $xe = ye, xf = yf$. 这说明 $\{a, e\}, \{a, f\}$ 是正则对, 所以 $e, f \in \mathcal{M}_a$. 因此 a 是 $_SS$ 的正则元, 从而是逆元, 所以 $|\mathcal{M}_a| = 1$, 故有 $e = f$.

(iii) ⇒ (i) 设 A 是左 S-系, $a \in A$ 是正则元. 假定 $e, f \in \mathcal{M}_a$, 则 $\{a, e\}, \{a, f\}$ 都是正则对. 设 $x, y \in S$ 使得 $xe = ye$, 则 $xa = xea = yea = ya$, 所以 $xf = yf$. 反之若 $xf = yf$, 则 $xe = ye$. 所以由[18]中的引理1.1知 $e\mathcal{R}^* f$, 所以 $e = f$. 这就证明了 $|\mathcal{M}_a| = 1$, 即 a 是 A 的逆元

同样的方法可以证明:

推论2.10 如下几条等价:

(i) 对于任意右 S-系 A, A 中的正则元是逆元

(ii) S_S 中的正则元是逆元

(iii) 每个 $\mathcal{L}^*$-类中最多只有一个幂等元

定理2.11 设 S 是 Abundant 幺半群, 则 S 是 adequate 幺半群当且仅当所有正则的左 S-系和右 S-系都是逆的

证明 因为 Abundant 幺半群作为左、右 S-系都是正则的, 所以由引理2.9和推论2.10即得结论

定理2.12 设 S 是 von Neumann 正则幺半群. 则 S 是逆幺半群当且仅当所有正则的左 S-系和所有正则的右 S-系都是逆的

证明 当 S 是 von Neumann 正则幺半群时, $_SS$, S_S 分别是正则的左、右 S-系, 并且 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$. 所以由引理2.9和推论2.10即得结论

参 考 文 献

[1] J. M. Howie, *An introduction to semigroup theory*, Academic Press, 1976.

[2] M. Kilp and U. Knauer, *Characterization of monoids by properties of regular acts*, J. Pure App. Alg., 46(1987), 217-231.

[3] Tran Lam Hach, *Characterization of monoids by regular acts*, Period. Sci Math. Hung., 16 (1985), 273-279.

[4] U. Knauer and A. Mikhalev, *Wreath products of acts over monoids I. regular and inverse acts*, J. Pure Appl. Alg., 51(1988), 251-260.

[5] 郭聿琦, K. P. Shum, 朱聘瑜, 左 C-rpp 半群的结构, 科学通报, 37(4) (1992), 292—294.

[6] 朱聘瑜, 郭聿琦, 岑嘉评, 左 C-半群的特征与结构, 中国科学, A 辑, 1991, 6, 582—590.

[7] Liu Zhongkui, *A characterization of regular monoids by flatness of left acts*, Semigroup Forum, 46 (1993), 85-89.

[8] J. Fountain, *Right pp monoids with central idempotents*, Semigroup Forum, 13(1977), 229-237.

[9] M. Kilp, *Commutative monoids all of whose principal ideals are projective*, Semigroup Forum, 6 (1973), 334-339.

[10] Tang Xilin, *Semigroups with the congruce extension property*, Doctoral Dissertation, Lanzhou University, 1993.

[11] U. Knauer, *Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids*, Semigroup Forum, 3(1972), 359- 370.

[12] Liu Zhongkui, *Characterization of monoids by condition (P) of cyclic left acts*, Semigroup Forum, 49(1994), 31- 39.

[13] Liu Zhongkui, *Monoids over which all regular acts are flat*, Semigroup Forum, 50(1995), 135- 139.

[14] S. Bulman-Fleming and K. McDowell, *Monoids over which all weakly flat acts are flat*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 33(1990), 287- 298.

[15] S. Bulman-Fleming, *Pullback-flat acts are strongly flat*, Can. Math. Bull., 34(4) (1991), 456- 461.

[16] P. Normak, *On equalizer-flat and pullback-flat acts*, Semigroup Forum, 36(1987), 293- 313.

[17] S. Bulman-Fleming and K. McDowell, *Absolutely flat semigroups*, Pacific J. Math., 107(1983), 319- 333.

[18] J. Fountain, *Abundant semigroups*, Proc. London Math. Soc., 44(3) (1982), 103- 129.

Characterization of Monoids by L-Inverse Left Acts

Liu Zhongkui

(Dept. of Math., Northwest Normal Univ., Lanzhou 730070)

Abstract

It is well-known that regular left acts and inverse left acts are natural generalizations of von Neumann regular semigroups and inverse semigroups, respectively. As a natural generalization of left inverse semigroups, we introduce a concept of L-inverse left acts. Some characterizations of monoids are given using properties of L-inverse left acts.

Keywords L-inverse left acts, regular left acts, inverse acts